専門科目（午前）　　　　　　　　　　　　　　　　２２　大修

材料工学Ａ（金属材料系），Ｂ（無機材料系）　　　時間　午前９時３０分～１２時

物質科学創造（金属材料系），（無機材料系）

材料物理科学（金属材料系），（無機材料系）

注意事項

1．この試験問題は，専門科目「材料工学Ａ（金属材料系），Ｂ（無機材料系）・物質科学創造（金属材料系），（無機材料系）・材料物理科学（金属材料系），（無機材料系）」の共通問題である．受験票に記載されている専門科目であることを確認すること．

2．問題用紙は切り離さないこと．

3．以下の６題全てについて解答せよ．

4．解答は全て解答用紙に記入すること．問題用紙に解答を記入しても採点されないので，注意すること．

5．解答は１問題ごとに別々の解答用紙に記入せよ．

6．各解答用紙には必ず問題番号および受験番号を記入せよ．

7．解答用紙を提出すること．問題用紙は持ち帰ってよい．

1．EとOをそれぞれ単位行列と零行列とし，行列の演算に関する下の問１～３に答えよ．

問１．行列PとQが，関係式

$$P+Q=E \quad と \quad PQ=O$$

を満足する場合について考える．このPとQについて，

(1) $P^2=P$

(2) $Q^2=Q$

(3) $QP=O$

が成り立つことを，それぞれ示せ．

問２．実数を成分とする二次正方行列 M が，互いに異なる実数の固有値αとβを持つ場合，

$$M=\alpha U+\beta V \text{，ただし，} U+V=E$$

と表すことができる行列UとVが存在する． $M=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$であるとき，

(1) Mの固有値αとβ（ただし，$\alpha<\beta$とする）

(2) 行列UとV

(3) 行列の積 UV

を，それぞれ求めよ．

問３．$M=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$であるとき，$M^n$の成分（ただし，$n$は自然数）を求めよ．

２．xを独立変数とする関数$y(x)$に関する次の微分方程式について，下の問１－３に答えよ．

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}-(p+4)\frac{dy(x)}{dx}+(2p+4)y(x)=0 \qquad (1)$$

ただし，　$0 \le p \le 1$とする．

問１．式(1)の微分方程式の２つの１次独立な解をy_1，y_2とすると，これらの線形結合も解であることを示せ．

問２．$0 < p \le 1$の条件下で，式(1)を解き，一般解を求めよ．

問３．$p=0$の場合の式(1)の一般解を，定数変化法を用いて導出せよ．

3．次の文章中の①～⑨に最も適する式等を入れて，文章を完成せよ．

図 3-1 のように，θの傾きをなす粗い斜面上の円板の運動を考える．いま，斜面に沿って下方にx軸，それに垂直にy軸をとると，円板に働く力とその作用点は図 3-1 の通りである．図では円板の半径をa，質量をMとし、Fを斜面からの垂直抗力，Rはまさつ力とする．重心運動の運動方程式は，重心の速度をv，時間をtとすると

$$x\text{成分：}M\frac{dv}{dt}=\boxed{\quad ① \quad} \tag{1}$$

$$y\text{成分：}0=\boxed{\quad ② \quad} \tag{2}$$

この円板の中心を通り円板に垂直な軸のまわりの慣性モーメントIは

$$I=\frac{1}{2}Ma^2 \tag{3}$$

で与えられる．

回転角速度をωとすると，力のモーメントがまさつ力だけから生じるから、円板の中心回りの回転の方程式は

$$I\frac{d\omega}{dt}=\boxed{\quad ③ \quad} \tag{4}$$

で与えられる．

まさつ力Rが十分に大きく，円板がすべらずに転がり落ちる場合，vとωの間には

$$v=\boxed{\quad ④ \quad} \tag{5}$$

の関係がなければならない．式 (1) と式 (4) より得られる関係に式 (3) と式 (5) を適用すると，まさつ力Rは

$$R=\boxed{\quad ⑤ \quad} \tag{6}$$

となる．円板が斜面をすべらずにころがるためには，斜面と円板の間の静止まさつ係数をμとすると

$$R<\text{ 最大まさつ力 }=\mu F \tag{7}$$

の関係が成り立つ．式 (7) の不等式に，式 (2) と式 (6) を適用することにより傾斜角θは

$$\tan\theta<\boxed{\quad ⑥ \quad} \tag{8}$$

の条件をみたさなければならない．このとき加速度は式 (1) と式 (6) より

$$\frac{dv}{dt}=\boxed{\quad ⑦ \quad} \tag{9}$$

であるから，$t=0$で$v=0$，$\omega=0$とすれば，円板の運動は

$$v=\boxed{\quad ⑧ \quad} \tag{10}$$

$$\omega=\boxed{\quad ⑨ \quad} \tag{11}$$

と求まる．

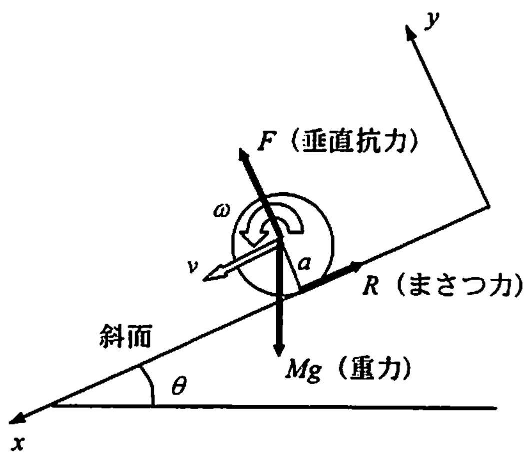

図 3-1

4．次の文章を読み，下の問1～4に答えよ．ただし，導出過程も示せ．

水素原子の電子の軌道運動を，図4-1に示すように，原子核を中心とする速さ v の円運動と仮定し，電子の質量を m，電子の電荷を $-e$，軌道半径を r_0 とする．

問1．　電子は核との間のクーロン力と遠心力とが釣り合って軌道運動をすると考えることができる．この場合，電子の速さ v が，$v = e / \sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r_0}$ で表せることを示せ．ε_0 は真空誘電率である．

問2．　電子の軌道運動による円電流 I を，e, v, r_0 を用いて表せ．

問3．　ビオ・サバールの法則により，微小長さ dl に流れる電流素片 Idl によって，電子が軌道運動する軸上のP点に微小の磁束密度 dB が生じる．その大きさは $dB = \mu_0 Idl/4\pi R^2$ で表され，その方向は dl とPの連結線と直交する．電子の軌道運動の軸と dB とのなす角度を θ とする．R は dl とP点との距離である．電子の軌道運動によるP点の磁束密度の大きさ B を μ_0, I, r_0 および x で表せ．なお，μ_0 は真空透磁率で，x は円電流の中心とP点との距離である．

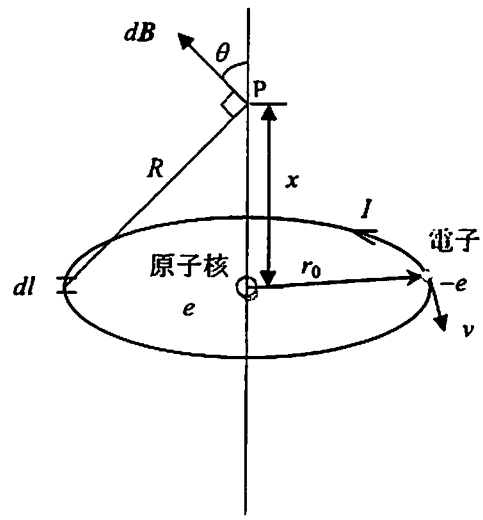

図4-1

問4．　電子の軌道運動による磁気モーメントの大きさ M は，$M = \mu_0 IA$ で表せる．A は円軌道の囲む面積である．問3で導いたP点の磁束密度の大きさ B と M の関係を式で示せ．

5．次の文章を読み，下の問１～３に答えよ．なお，導出の過程も示すこと．

図 5-1 のように，熱をよく伝え，かつ化学的に不活性な材質のシリンダーと，同じ材質で排気口および栓が付いている可動ピストンからなる容器中に，単原子分子で化学的に不活性な完全気体 A が 1 mol 封入されている．このとき排気口は栓で閉じられている．これに排気口の栓を開けて金属 X および Z を加えることを考える．X と Z は 1 atm 下で図 5-2 のような状態図を示す二元系の各成分元素である．排気口を通じて物質の投入、排気を行うときは外気との混合はないものとし，系内では気相と X と Z からなる凝縮相は上下に分かれ，その界面は平面になるとする．また，この系の気相中各成分は完全気体として振舞うと仮定し，凝縮相からの X および Z の蒸発量は無視できるものとする．なお，気体定数は 8.3 $\mathrm{Jmol^{-1}K^{-1}}$ とし，$\ln x = 2.3\log x$ とする．

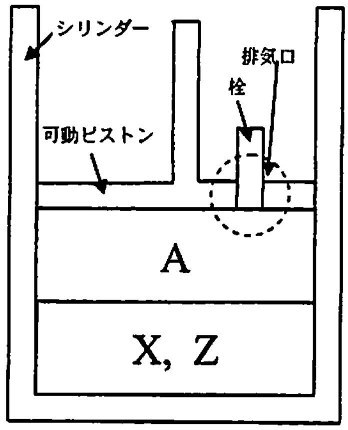

図5−1

問１．この容器内に，まず 0.6 mol の X と 0.4 mol の Z を排気口の栓を開けて封入し，外界と同じ温度 1000 K，全圧 1 atm に保ち平衡状態とした．
①この系に存在する相の数と種類を答えよ．ただし，容器は相，成分として数えない．
②この系の自由度を求めよ．

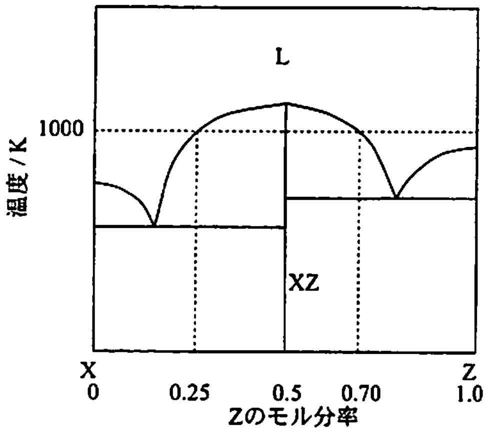

図5−2

問２．問１の平衡状態では気相中 X の分圧は 1.0×10^{-4} atm，Z の分圧は 1.0×10^{-8} atm となった．X および Z の 1000 K における純物質の蒸気圧をそれぞれ 1.0×10^{-3} atm，1.0×10^{-4} atm とするとき，以下に答えよ．
① 標準状態の純物質を基準にした場合の X および Z の活量（ラウール基準の活量）を求めよ．
② 以下の式(1)の反応の 1000 K における標準 Gibbs エネルギー変化を求めよ．

$$\mathrm{X(l) + Z(l) = XZ(s)} \qquad (1)$$

③XZ 1 mol の生成熱を求めよ．ただし，上記の反応のエントロピー変化は十分に小さく無視できるとする．
④問１の操作を行った場合に，式(1)の反応により発生する熱量を求めよ．

問３．①問２の系にさらに 0.1 mol の Z を，栓を開けて排気口から投入して栓を閉じ，外界と同じ温度 1000 K，全圧 1 atm に保ち平衡にした．このときの気相中の X および Z の分圧を求めよ．
②次にシリンダーの排気口から気相を排気して除去し，ピストンと凝縮相を接触させて排気口に栓をした後，平衡になるまで保持したときの系内の相の数を求めよ．

6．固溶体結晶の拡散に関する次の文章中の①～⑩に最も適する式や語句を入れて文章を完成せよ．

ある結晶AにB原子が固溶している場合の一次元の物質流を考える．図 6-1 のように，結晶A内の一次元の x 方向に対して垂直な格子面があり，おのおのの格子面に存在するB原子が格子面間を前後にジャンプして移動するとする．いま，隣接した格子面 α と格子面 β に注目する．格子面 α の単位面積当たりのB原子の数を n_α，格子面 β の単位面積当たりのB原子の数を n_β とし，格子面 α と β の間隔を L とする．この2つの面のB原子の平均濃度 n，および，この2つの面における濃度勾配 (dn/dx) は

$$n = \boxed{\quad ① \quad} \tag{1}$$

$$\frac{dn}{dx} = \boxed{\quad ② \quad} \tag{2}$$

となる．n_α と n_β は n，L，そして (dn/dx) を用いて

$$n_\alpha = \boxed{\quad ③ \quad} \tag{3}$$

$$n_\beta = \boxed{\quad ④ \quad} \tag{4}$$

と表せる．ここで，B原子が格子面 α から格子面 β へジャンプする頻度を $\Gamma_{\alpha\beta}$，B原子が格子面 β から格子面 α へジャンプする頻度を $\Gamma_{\beta\alpha}$ とすると，格子面 α から格子面 β に向かうB原子の正味の流束 J は

$$J = \boxed{\quad ⑤ \quad} \tag{5}$$

となる．式(5)に式(3)と式(4)を代入し，さらに，単位体積当たりの濃度 $C = n/L$ を用いて，

$$J = \boxed{\quad ⑥ \quad} \tag{6}$$

が得られる．

ここで，ジャンプする頻度が $\Gamma_{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta\alpha}$ である場合，この頻度を $\Gamma\left(= \Gamma_{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta\alpha}\right)$ とおくと，式(6)は

$$J = \boxed{\quad ⑦ \quad} \tag{7}$$

となる．

式(7)を $\boxed{\quad ⑧ \quad}$ 流拡散を表すフィックの第一法則の式と比較すると，拡散係数 D と格子面間の距離 L，ジャンプの頻度 Γ の間には次の関係が成り立つことがわかる．

$$D = \boxed{\quad ⑨ \quad} \tag{8}$$

一方，ジャンプする頻度 $\Gamma_{\alpha\beta}$ と $\Gamma_{\beta\alpha}$ の大小関係により，$\boxed{\quad ⑧ \quad}$ 状態での流束 J が0（ゼロ）となる場合がある．このとき，$x=0$ での濃度を C_0 とすると，位置 x における濃度 C は式(6)から，

$$C = \boxed{\quad ⑩ \quad} \tag{9}$$

となる．

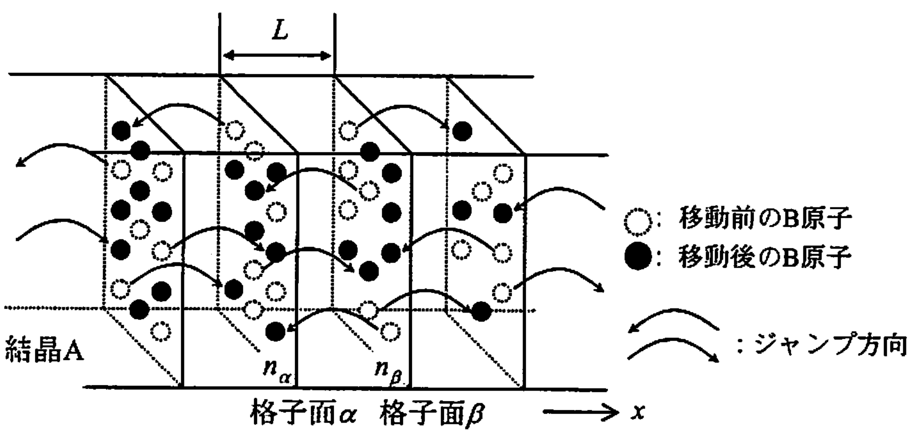

図6-1