専門科目（午前）　　　　　　　　　　　　　　２１　大修

材料工学Ａ（金属材料系），Ｂ（無機材料系）　　時間　午前９時３０分～１２時

物質科学創造（金属材料系），（無機材料系）

材料物理科学（金属材料系），（無機材料系）

注意事項

１．この試験問題は，専門科目「材料工学Ａ（金属材料系），Ｂ（無機材料系）・物質科学創造（金属材料系），（無機材料系）・材料物理科学（金属材料系），（無機材料系）」の共通問題である．受験票に記載されている専門科目であることを確認すること．

２．問題用紙は切り離さないこと．

３．以下の６題全てについて解答せよ．

４．解答は全て解答用紙に記入すること．問題用紙に解答を記入しても採点されないので，注意すること．

５．解答は１問題ごとに別々の解答用紙に記入せよ．

６．各解答用紙には必ず問題番号および受験番号を記入せよ．

７．解答用紙を提出すること．問題用紙は持ち帰ってよい．

１．３行３列の行列 $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -4 & 9 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ に関する以下の設問 (a)～(d) に答えよ．

(a) 行列 A の固有値は α_1， α_2 （$\alpha_1 < \alpha_2$） のみである． α_1， α_2 を求めよ．

(b) α_1， α_2 に対する行列 A の固有ベクトルをそれぞれ $V_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$， $V_2=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ とする． V_1 および V_2 の成分が満足すべき条件を求めよ．

(c) 行列 A は対角化可能であることを示せ．

(d) (a)で求めた α_1， α_2 を成分にもつ行列 $B=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ について考える．この行列 B は対角化できないことを示せ．

２．実数 x を独立変数とする関数 $y = x\,e^{x}$（e は自然対数の底）について，以下の設問(a)~(e)に答えよ．

(a) $y = x\,e^{x}$ の導関数 y' と第２階導関数 y'' を求めよ．

(b) $y = x\,e^{x}$ の変曲点と極値を求めよ．

(c) 曲線 $y = x\,e^{x}$ の概形を描け．ただし，x の範囲を $-4 \le x \le 1$ とせよ．

(d) $y = x\,e^{x}$ を積分し，実数 t_1 を独立変数とする関数 $F_1(t_1) = \int_0^{t_1} y dx$ を求めよ．

(e) 実数 t_2 を独立変数とする関数 $F_2(t_2)$ が $F_2(t_2) = \int_0^{t_2} F_1(t_1)\,dt_1$ であり，実数 t_3 を独立変数とする関数 $F_3(t_3)$ が $F_3(t_3) = \int_0^{t_3} F_2(t_2)\,dt_2$ であるとき，関数 $F_3(t_3)$ を求めよ．

３．次の文章を読んで，以下の設問(a)ー(c)に答えよ．

図 3-1 に示すように，水平な台上の質点 A(質量m_A)は，バネ(バネ定数k)を介して壁につながっている．また，質点 B（質量m_B)は，常に長さが一定の線を介して質点 A につながっている．まず，バネが自然長になるように，質点 A の位置を調整してから，その場で，一旦，質点 A を静止させる．次に，質点 A から手を離し，質点 A を台上で水平運動させる．最初は，質点 B に作用する重力により，質点 A は右向きに運動するが，変位が大きくなるとバネの復元力によって左向きの運動に変わることが予想される．ここで，バネが自然長の時の質点 A の位置を原点とし，水平方向右向きにx座標を取るものとする．また，質点 A から手を離した時を時刻$t = 0$とする．ただし，重力加速度をgとし，バネや線の質量は無視できるものとする．また，質点 A と台との摩擦や滑車と線との摩擦も無視できるものとする．

(a) 質点 A の変位の大きさと質点 B の変位の大きさは同じになるので，両者を合わせて，一つの質点系と考えることができる．質点 A の位置がxであった時，この質点系に作用する力を求めよ．

(b) この質点系の運動方程式を導け．

(c) この問題の題意に合うような初期条件を用いて，(b)の運動方程式を解き，質点 A の位置を表すxの時間変化を求めよ．

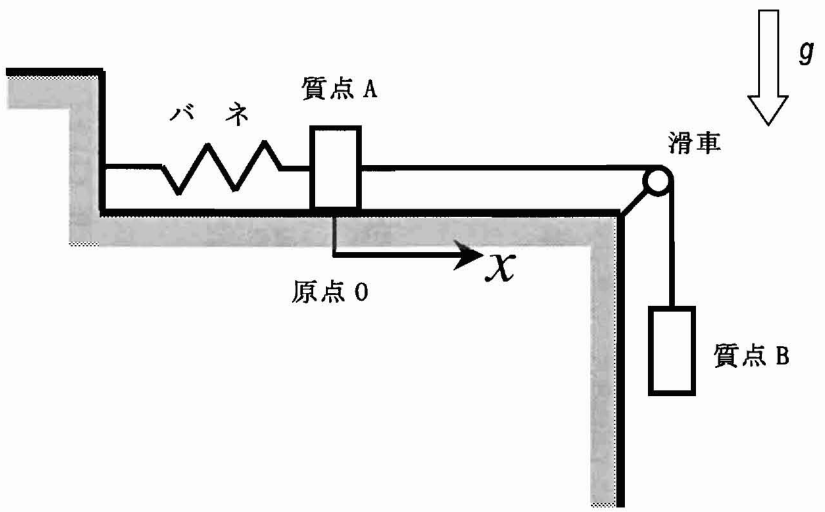

図 3-1

4．次の文章を読み，以下の設問(a)～(d)に答えよ．ただし，設問(b)以外は導出過程も示せ．

金属結晶に電場 E を作用させると，自由電子（静止質量 m，電荷 $-e$）の運動によって電流が生じる．このとき，自由電子は，電場により加速されるとともに，格子振動や欠陥によって散乱され，これが自由電子の運動の抵抗として働く．その結果，自由電子は平均の速さ v_D で等速直線運動しているとみなせる．この定常状態において，自由電子への抵抗力の大きさは，散乱時間（緩和時間）τ を用いて，mv_D/τ と表すことができ，抵抗力は自由電子の運動と逆向きにはたらく．

(a) 自由電子の平均の速さ v_D を E，m，τ および e で表せ．

(b) 金属の単位体積中の自由電子の数を n としたとき，電流密度の大きさ j を，n，e および v_D を用いて表せ．

(c) (b)の結果を用いて，電気抵抗率 ρ が，$\rho = m/(ne^2\tau)$ と表せることを示せ．

(d) 電気抵抗率 $\rho = 1.6 \times 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$，格子定数 $a_0 = 0.40\ \mathrm{nm}$ をもつ面心立方構造の金属について，τ の値を求めよ．ただし，原子１個が自由電子１つを供給するものとし，また，自由電子の静止質量 $m = 9.1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$，電気素量 $e = 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$ とせよ．

5．次の文章を読み，下の設問(a)〜(d)に答えよ．なお，導出の過程も示すこと．

図 5-1 のように，断熱性のシリンダー1 と熱をよく伝える栓 2 および断熱性の可動ピストン 3 からなる容器中に，単原子分子の完全気体 A，二原子分子の完全気体 X_2，Z_2 をそれぞれ 1.0 mol，0.50 mol，0.50 mol ずつ封入した．気体 A の入っている部屋をⅠ，気体 X_2，Z_2 が入っている部屋をⅡとし，はじめ X_2 と Z_2 は反応せず完全に混合しているものとする．各部屋のはじめの温度と圧力はそれぞれ 300 K，1.0 atm とする．また，外界の温度は 300 K で，栓 2 は熱をよく伝えるため部屋Ⅰは常に外界と同じ温度 300 K に保たれる．なお，気体定数は 8.3 $\mathrm{Jmol^{-1}K^{-1}}$ とし，また，必要があれば ln2 = 0.69 を用いよ．

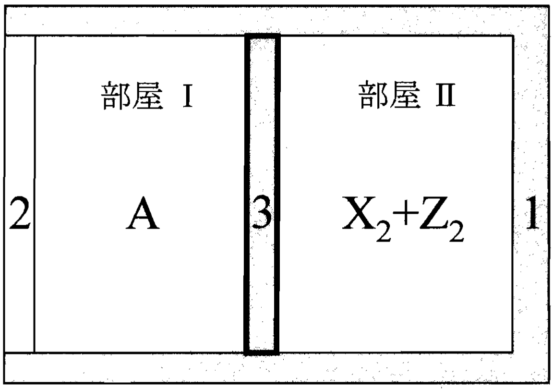

図5−1

(a) 部屋Ⅱ内の X_2 と Z_2 を，体積が無視できる適切な触媒によりゆっくり反応させ，完全気体 XZ を下式の反応により生成させた．反応が進行するにしたがい，ピストン 3 は可逆的に左に移動し，部屋Ⅰの体積が反応前の半分になったところで反応は平衡に達し，部屋Ⅰおよび Ⅱの圧力が最終的に釣り合った．

$$1/2X_2(g) + 1/2Z_2(g) = XZ(g)$$

① このときの部屋Ⅰおよび Ⅱの圧力 P を求めよ．
② このときの部屋Ⅱの温度 T を求めよ．

(b) 部屋Ⅱ内の気体のモル定容熱容量はいずれも 20 $\mathrm{Jmol^{-1}K^{-1}}$ として，
① 上記の温度変化による部屋Ⅱの全気体の内部エネルギー変化 ΔU_{II} を求めよ．
② また，部屋Ⅰの気体になされた仕事 W_{I} を求めよ．

(c) ① 上記の温度変化による部屋Ⅱの全気体の内部エネルギー変化 ΔU_{II}，部屋Ⅱの気体になされた仕事 W_{II}，反応により発生した熱 q_{II} の間にはどのような関係があるか，式で示せ．
② q_{II} を求めよ．

(d) 反応が終了した状態で部屋Ⅱ中には XZ が r mol 生成していた．X_2，Z_2 から XZ が生成する上式の反応のエントロピー変化は 0 $\mathrm{JK^{-1}}$ とし，また反応のエンタルピー変化は温度と圧力には依存しないものとして，以下に答えよ．
① 上記の反応のエンタルピー変化 ΔH および標準ギブズエネルギー変化 $\Delta G°$を，r を用いて示せ．
② この状態からピストン 3 を取り除いて，部屋Ⅰおよび Ⅱの気体を混合し，再び平衡に到達させた．このときの XZ のモル分率 N_{XZ} と X_2 のモル分率 $N_{\mathrm{X_2}}$ の比 $N_{\mathrm{XZ}}/N_{\mathrm{X_2}}$ を，r を用いて示せ．ただし，A と他の気体は反応しないものとし，ピストン 3 の体積は無視できるものとする．

6．次の文章を読み，下の設問(a)〜(c)に答えよ．なお，導出過程を省略せずに記述すること．

均一で清浄な平面と十分な厚みを持つ固体 A で作られた容器内部が真空に保たれている（図 6–1）．いま，時刻 $t = 0$ で容器内部に気体 B を導入し，圧力 P に制御した．このときの容器内の気体 B が固体 A の表面に吸着する挙動について考える（図 6–2）．なお，気体 B は A 表面に単分子吸着するものとし，1つの吸着サイトには1つの気体分子しか吸着しないものとする．また，A の表面の単位面積当たりの吸着サイト数（N）に対する，気体 B の吸着しているサイト数の割合を θ（表面被覆率）で表すものとする．なお，温度は常に一定に保たれているものとする．

(a) 固体 A 表面での気体 B の吸着平衡は瞬時に達するものとする．また，A 表面の単位面積当たりの B の吸着速度は圧力 P と吸着していないサイト数に比例し，一方，A 表面の単位面積当たりの B の脱離速度は吸着しているサイトの数に比例するとする．この場合，吸着速度，脱離速度の比例定数をそれぞれ k_1，k_2 として，吸着／脱離の平衡の関係を表す式を導け．

(b) (a)の状態に加え，吸着した気体 B の一部が，固体 A 中へ拡散していく場合を考える（図 6–3）．B の A 表面への吸着平衡に達する速度は，B の A 内部への拡散に比べて十分に速く，表面の被覆状態は逐次，平衡と見なせるものとする．また，B の A 中への拡散は，吸着／脱離現象とは独立に生じ，Fick の第 1 法則に従うものとする．A 中の B の拡散係数を D，A 中の B の濃度を $c(x,t)$ として，A 表面における B の吸着／脱離／拡散による物質収支を表す式を導け．ここで，x は A の表面からの距離である（図 6–3 参照）．

(c) 表面被覆率 θ が一定となるように圧力 P を調整して実験を行った。その結果，固体 A 中の B の濃度が，k_3 を比例定数として，

$$c(x,t) = k_3 N\theta\left[1 - erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right]$$

で表されることがわかった．圧力 P を k_1，k_2，k_3，θ，D，t で表せ．なお，D は定数とし，誤差関数 $erf(z)$ は以下の式により定義される．

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-u^2}\,du$$

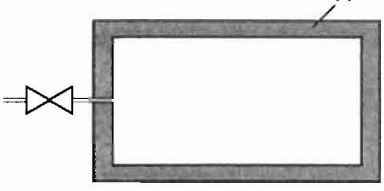

図 6–1

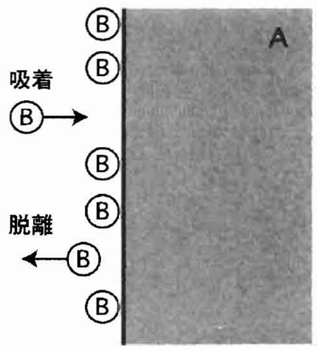

図 6–2

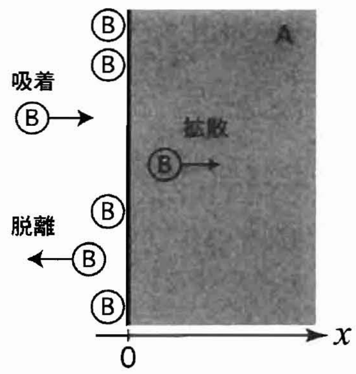

図 6–3