

専門科目（午前）

材料工学 A, B

物質科学創造 A, B

材料物理学 B, C

20 大修

時間 午前9時30分～12時

注意事項

1. この試験問題は、専門科目「材料工学A,B・物質科学創造A,B・材料物理学B,C」の共通問題である。受験票に記載されている専門科目であることを確認すること。
2. 問題用紙は切り離さないこと。
3. 以下の6題全てについて解答せよ。
4. 解答は全て解答用紙に記入すること。問題用紙に解答を記入しても採点されないので、注意すること。
5. 解答は1問題ごとに別々の解答用紙に記入せよ。
6. 各解答用紙には必ず問題番号および受験番号を記入せよ。
7. 解答用紙を提出すること。問題用紙は持ち帰ってよい。

1. 点Oを原点とする $x-y$ 直交座標系を使って、平面上のベクトルの変換について考える。次の文章を読み、設問(a)~(d)に答えよ。

平面上のすべての点を、原点Oを中心として角度 θ だけ回転させる変換は、角度 θ の回転と呼ばれる。図1-1のように、角度 θ の回転によって点Pが点Qに移り、それらの点の位置ベクトル

が、それぞれ、 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ であるとき、 $\boldsymbol{v}'$ と $\boldsymbol{v}$ のあいだの関係は、角度 θ の回転に対応

する行列 A によって $\boldsymbol{v}' = A\boldsymbol{v}$ と書くことができる。

また、平面上のすべての点を x 軸に関する対称点に移す変換は、 x 軸に関する折返しと呼ばれる。図1-2のように、 x 軸に関する折返しによって、位置ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする点Pが位置ベクトルを $\boldsymbol{v}''$ とする点Rに移るとき、 $\boldsymbol{v}''$ と $\boldsymbol{v}$ のあいだの関係は、 x 軸に関する折返しの行列 B によって $\boldsymbol{v}'' = B\boldsymbol{v}$ と書くことができる。

φ をある角度として点Tの座標が $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ であり、直線 ℓ が原点Oと点Tを通る直線であるとする。図1-3のように、直線 ℓ に関する折返しによって、位置ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする点Pが位置ベクトルを $\boldsymbol{v}'''$ とする点Sに移るとき、 $\boldsymbol{v}'''$ と $\boldsymbol{v}$ のあいだの関係は、直線 ℓ に関する折返しの行列 C によって $\boldsymbol{v}''' = C\boldsymbol{v}$ と書くことができる。

(a) 角度 θ の回転に対応する行列 A を求めよ。

(b) x 軸に関する折返しの行列 B を求めよ。

(c) 直線 ℓ に関する折返しの行列 C には逆行列 C^{-1} が存在する。 C と C^{-1} について、それらの行列式 $|C|$ と $|C^{-1}|$ の値を求めよ。

(d) 直線 ℓ に関する折返しの行列 C を求めよ。

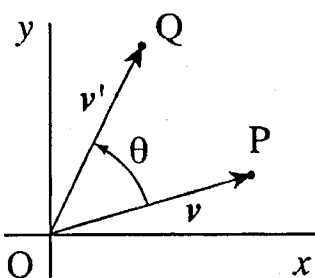


図 1-1

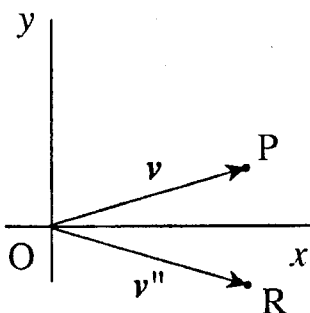


図 1-2

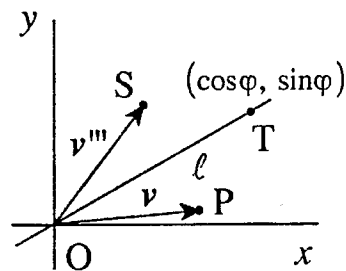


図 1-3

2. 次の設問(a), (b)に答えよ. なお導出の過程も示すこと.

(a) 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = x + y + 1$ の一般解を求めよ.

(b) 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 1}{-x + y - 1}$ の一般解を求めよ.

3. 次の文章を読み、設問(a)~(d)に答えよ。

図 3-1 のように、自然長 ℓ 、バネ定数 k の質量が無視できるバネを用いて、質点 A (質量 m_1) と質点 B (質量 m_2) とを結合し、床面から高さ h の位置に質点 B を、高さ $(h + \ell)$ の位置に質点 A を保持してから、質点 A と質点 B とを同時に自由落下させた。質点 B が初めて床面ではねかえった直後の、この質点系の運動を考える。ただし、図 3-2 のように、床面を原点とし、鉛直上向きを正の方向とする x 座標を取り、質点 A の座標を x_1 、質点 B の座標を x_2 で表すものとする。また、質点 B が初めて床面ではねかえった瞬間を時間 t の原点とする。なお、質点 B の床面でののはねかえりは瞬間的に起こり、バネによる質点系の振動は鉛直方向のみ起こるものとする。重力加速度を g で表し、質点 B と床面との反発係数を e ($0 < e \leq 1$) で表す。

- 質点 B が初めて床面ではねかえる直前からのはねかえった直後までの、この質点系の力学的エネルギー変化の絶対値を求めよ。
- 質点 B が初めて床面ではねかえった直後の、質点 A と質点 B の運動方程式をそれぞれ導け。
- 設問(b)で導いた質点 A と質点 B に関する運動方程式から、この質点系の相対運動の運動方程式を表す相対座標 $\xi (\equiv x_1 - x_2)$ に関する微分方程式を導け。ただし、換算質量を $\mu (\equiv (1/m_1 + 1/m_2)^{-1})$ とせよ。
- 設問(c)で導出した ξ に関する微分方程式を解いて、 ξ を時間 t の関数で表せ。

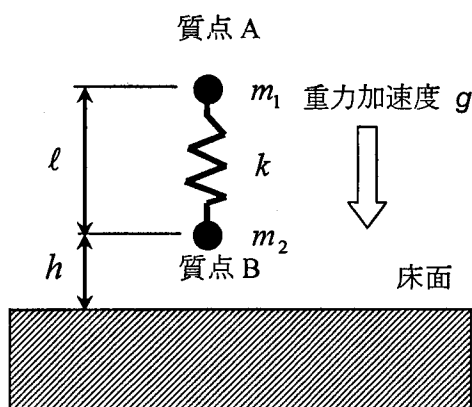


図 3-1

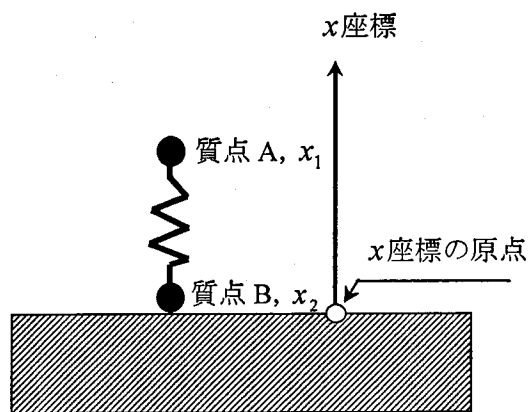


図 3-2

4. 次の①~⑩にもっとも適切な数式、数値、単語、記号を入れ、文章を完成せよ。ただし、数値を入れる場合の有効数字は2桁とする。

異なる物質 α , β を図4-1のように基板上に周期的に交互堆積させ、多層膜を作製した。この多層膜に波長 $\lambda = 0.15 \text{ nm}$ の平行X線を入射し、入射角 θ を変化させながら回折強度を測定し、図4-2の結果を得た。多層膜の周期構造によるブラッグ反射は、 2θ -回折強度曲線に強度のピークをもたらしている。たとえば、 $2\theta_A = 9.40^\circ$ には回折ピークAがあり、それから 0.78° 高角度側に回折ピークBがある。回折ピークAが $2\theta = 0^\circ$ から数えて m 番目のピークであるとする、その回折条件は次式で与えられる。

$$2L \sin \theta_A = m\lambda \quad (1)$$

ここで、 L は図4-1に示す多層膜の周期である。同様に、回折ピークBは $m+1$ 番目の回折ピークであるから次式が成り立つ。

$$2L \sin \theta_B = \text{① (数式)} \quad (2)$$

(1), (2)式より m を消去すると、

$$L = \text{② (数式)} \quad (3)$$

と求められる。図4-2では $2\theta_A$ も $2\theta_B$ も 10° 程度で、 $\theta_A \times (\pi/180) \ll 1$, $\theta_B \times (\pi/180) \ll 1$ とみなせるから、(3)式は

$$L \approx \text{③ (数式)} \quad (4)$$

のように近似できる。(4)式より周期 L の値は

$$L \approx \text{④ (数値)} \text{ [nm]} \quad (5)$$

と計算できる。この L の値を(1)式に代入することより、 $m = \text{⑤ (数値)}$ を得る。

X線は電磁波であり、物体に入射する際に屈折する。X線に対する物質の屈折率 n は、一般に1よりわずかに小さいため、X線が入射角 θ で空気から物体に入射するとき、X線は図4-3の⑥(記号)のように進む。したがって、入射角 θ が小さくなると、⑦(単語)に起因した現象が現れる。図4-2における $2\theta_c = 0.80^\circ$ 付近のピークの形状は他のピークとは異なっており、このピークが回折現象ではなく、

⑦(単語)に起因していることを示している。角度 θ_c は⑦(単語)が起こる上限の角度である。空気の屈折率を $n(\text{空気}) = 1$ とすると、この角度 θ_c とX線に対する多層膜の平均屈折率 $n(\text{多層膜})$ の間には、次の関係が成立する。

$$n(\text{多層膜}) = \sin \text{⑧ (数式)} \quad (6)$$

ここで、 $\theta_c \times (\pi/180) \ll 1$ とみなせるので、近似的に

$$1 - n(\text{多層膜}) \approx \text{⑨ (数式)} \quad (7)$$

を得る。(6)式および $2\theta_c = 0.80^\circ$ を用いて

$$1 - n(\text{多層膜}) \approx \text{⑩ (数値)} \times 10^{-5} \quad (8)$$

と求められる。

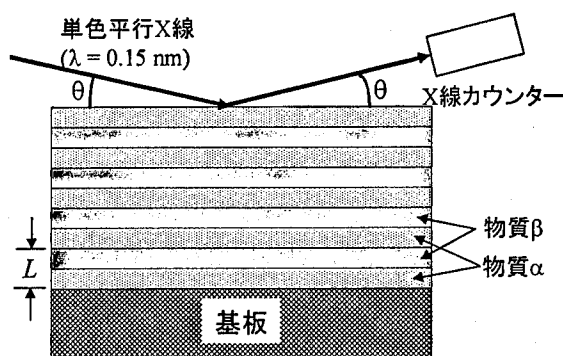


図4-1 多層膜とX線回折の幾何学的配置

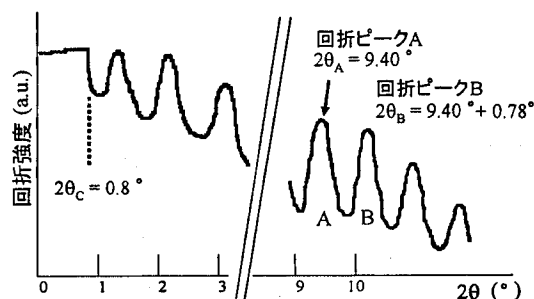


図4-2 多層膜にX線を入射させたときの 2θ -回折強度曲線

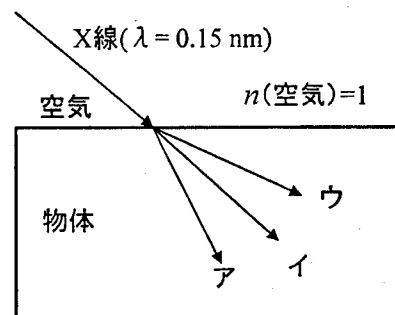


図4-3 X線の屈折

5. 次の文章を読み、設問(a)~(e)に答えよ。なお、導出の過程も示し、解答は有効数字2桁で示すこと。

ある純物質Aは温度 T_1 に融点をもつ。熱力学データテーブルに与えられた T_1 近傍における物質Aの固体および液体の標準モルエンタルピー H_m° と標準モルエントロピー S_m° を温度 T (K)の一次式に近似すると表5-1に示す式となる。

表 5-1 物質 A の熱力学データ

	$H_m^\circ / \text{J mol}^{-1}$	$S_m^\circ / \text{JK}^{-1} \text{mol}^{-1}$
固体(s)	$-9.00 \times 10^3 + 28.0 T$	$31.0 + 4.80 \times 10^{-2} T$
液体(l)	$-2.00 \times 10^3 + 30.0 T$	$50.0 + 3.80 \times 10^{-2} T$

- (a) 物質Aの固体および液体の標準モルギブズエネルギーをそれぞれ $G_m^\circ(\text{s})$ と $G_m^\circ(\text{l})$ とする。
 $G_m^\circ(\text{s})$ と $G_m^\circ(\text{l})$ を温度 T の関数としてそれぞれ表せ。
- (b) 物質Aの融点 T_1 を求めよ。
- (c) 温度 T_1 における物質Aの凝固を考える。この温度において1 molの物質Aが凝固した ($\text{A(l)} \rightarrow \text{A(s)}$ の変化が完了した) 場合、次の値を求めよ。
- ① 物質Aのエンタルピー変化 ΔH_A
 - ② 物質Aのエントロピー変化 ΔS_A
 - ③ 外界のエントロピー変化 ΔS_{sur}
 - ④ 物質Aと外界の全エントロピー変化 ΔS_{tot}
- (d) 温度 T_1 より100 K低い温度まで過冷却されたときの、物質Aの凝固を考える。この温度において1 molの物質Aが凝固した ($\text{A(l)} \rightarrow \text{A(s)}$ の変化が完了した) 場合、次の値を求めよ。
- ① 物質Aのエンタルピー変化 ΔH_A
 - ② 物質Aのエントロピー変化 ΔS_A
 - ③ 外界のエントロピー変化 ΔS_{sur}
 - ④ 物質Aと外界の全エントロピー変化 ΔS_{tot}
- (e) 設問(c)および(d)で得られた全エントロピー変化 ΔS_{tot} から、両者における凝固過程の進行の違いについて述べよ。

6. 次の文章を読み、設問(a)~(d)に答えよ。なお、導出の過程も示せ。

ある容器内に気体Aが初期濃度 $[A]_0$ で充填されている。これに外部よりエネルギー $h\nu$ (h :プランク定数, ν :光の振動数)の光を照射すると、図6-1のように中間生成物 A^* , A' を経由してBとCが生成する。容器内では反応は均一に生じ、その素反応は式(1)~(5)で表される。

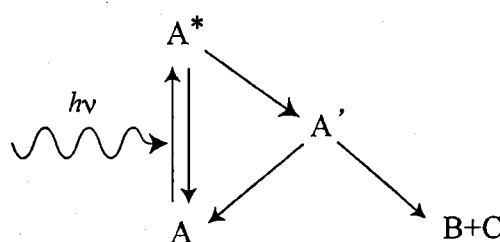
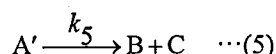
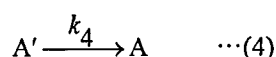
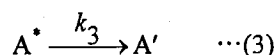
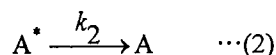


図 6-1

各素反応は一次反応で、 k_i ($i=2,3,4,5$)は各素反応の反応速度定数である。いま、時刻 $t=0$ において気体Aにきわめて短い時間、光を照射したところ、Aが A^* に励起される式(1)の素反応だけが進行して A^* の濃度が $[A^*]_0$ となった。その後、式(2)~(5)の反応が進行し、時間 t 経過後、A, A^* , A' , Bの濃度は、それぞれ $[A]$, $[A^*]$, $[A']$, $[B]$ となった。

(a) 各成分の濃度の変化速度 $d[A]/dt$, $d[A^*]/dt$, $d[A']/dt$, $d[B]/dt$ を、式(2)~(5)の各素反応の反応速度定数 k_i ($i=2\sim5$)と各成分の濃度 $[A]$, $[A^*]$, $[A']$, $[B]$ を用いて書き表せ。

(b) 設問(a)で導いた $[A^*]$ に関する微分方程式を解き、 k_i ($i=2\sim5$), $[A^*]_0$, t を用いて $[A^*]$ を表せ。

(c) 設問(a)で導いた $[A']$ に関する微分方程式を解き、 k_i ($i=2\sim5$), $[A^*]_0$, t を用いて $[A']$ を表せ。なお、微分方程式 $dy/dx + ay = b \cdot e^{-cx}$ の解は、 $y = \{b/(c-a)\} \cdot (e^{-ax} - e^{-cx})$ とする。

(d) $k_2 = k_3/20 = k_4/2 = k_5/5$ のとき、 $t \rightarrow \infty$ で $[B] = [A]/9$ となるためには、Aの初期濃度 $[A]_0$ の何パーセントを光照射によって A^* に励起する必要があるか、有効数字2桁で答えよ。