専門科目（午前）
材料工学 A, B
物質科学創造 A, B
材料物理科学 B, C

１９　大修
時間　午前９時３０分～１２時

注意事項

1. この試験問題は，専門科目「材料工学Ａ,Ｂ・物質科学創造Ａ,Ｂ・材料物理科学Ｂ,Ｃ」の共通問題である．受験票に記載されている専門科目であることを確認すること．
2. 問題用紙は切り離さないこと．
3. 以下の６題全てについて解答せよ．
4. 解答は全て解答用紙に記入すること．問題用紙に解答を記入しても採点されないので，注意すること．
5. 解答は１問題ごとに別々の解答用紙に記入せよ．
6. 各解答用紙には必ず問題番号および受験番号を記入せよ．
7. 解答用紙を提出すること．問題用紙は持ち帰ってよい．

1．　3次元空間に点Oを原点とする直交座標系をとる．このとき，実数a_{11}～a_{33}を成分として，点Oを始点とする以下のベクトル$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$が線形独立であるとする．行列$A_1$～$A_6$の列ベクトルが$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$により，それぞれ次のように表されるとき，以下の設問(a)～(c)に答えよ．ただし，k, l, mは0でない実数とする．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3), \qquad A_2 = (\boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_3),$$
$$A_3 = (k\boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_3), \qquad A_4 = (2k\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 + m\boldsymbol{a}_3 \quad \boldsymbol{a}_3),$$
$$A_5 = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 + k\boldsymbol{a}_2 + m\boldsymbol{a}_3 \quad k\boldsymbol{a}_2 + m\boldsymbol{a}_3),$$
$$A_6 = (k\boldsymbol{a}_1 + l\boldsymbol{a}_3 \quad l\boldsymbol{a}_1 + m\boldsymbol{a}_3 \quad m\boldsymbol{a}_1 + k\boldsymbol{a}_3)$$

(a)　k, l, mおよび適当な数を用いて，以下の空欄①～⑤を埋めよ．

- 行列式$\det A_2$の値は，行列式$\det A_1$の値の $\boxed{①}$ 倍である．
- 行列式$\det A_3$の値は，行列式$\det A_1$の値の $\boxed{②}$ 倍である．
- 行列式$\det A_4$の値は，行列式$\det A_1$の値の $\boxed{③}$ 倍である．
- 行列式$\det A_5$の値は，行列式$\det A_1$の値の $\boxed{④}$ 倍である．
- 行列式$\det A_6$の値は，$\boxed{⑤}$ である．

(b)　次のベクトル$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$を三辺とする図1-1に示すような四面体の体積$V_1$ (>0)をベクトル$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$の成分$a_{11}$～$a_{33}$を用いて表せ．

$$\boldsymbol{b}_1 = -\boldsymbol{a}_1, \qquad \boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{a}_2, \qquad \boldsymbol{b}_3 = -3\boldsymbol{a}_3$$

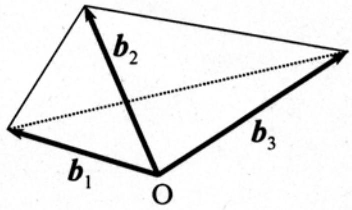

図 1-1

(c)　次のベクトル$\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$を三辺とする図1-2に示すような平行六面体の体積$V_2$ (>0)を行列式$\det A_1$を用いて表せ．

$$\boldsymbol{c}_1 = \frac{13\boldsymbol{a}_1}{30} + 15\boldsymbol{a}_2 + \frac{17\boldsymbol{a}_3}{30}, \qquad \boldsymbol{c}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{5} + 5\boldsymbol{a}_3, \qquad \boldsymbol{c}_3 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{6} + 4\boldsymbol{a}_3$$

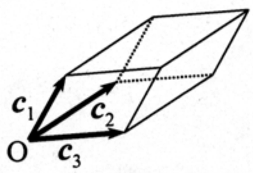

図 1-2

２．次の文章を読み，以下の設問(a)~(d)に答えよ．

中心をO，半径をrとする球の球面上に無作為に二つの点PとQをとり，線分OPとOQのなす角度をθ（ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$）とする（図 2-1）．

(a) 線分OPとある角度θ_K（ただし，$0 \leq \theta_K \leq \pi$）をなす線分を与える球面上の点の集合は，図 2-2 に示す円Cになる．円Cで二つに分割される球面のうち，点Pを含む部分の面積Aを求めよ．

(b) θが$0 \leq \theta \leq \theta_K$の範囲となる確率$F(\theta_K)$を求めよ．

(c) θの期待値E_1を求めよ．

(d) $r\sin\theta$の期待値E_2を求めよ．

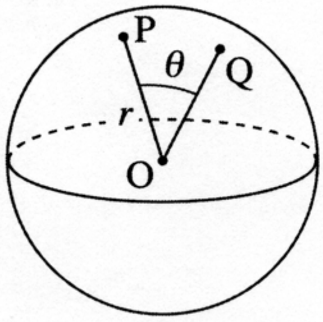

図 2-1

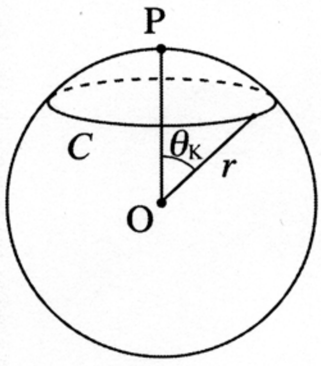

図 2-2

3.　次の文章を読み，以下の設問(a)～(f)に答えよ．

原子の振動が，結晶の中で弾性波としてどのように伝播していくかについて，単一原子からなる1次元原子鎖を例に考える．図 3-1 に示すように，質量mの原子は平衡距離aだけ離れて位置しており，隣りあう原子とはバネ定数βのバネで結ばれている．原子の振動は原子鎖の方向に限られ，力は最近接原子間のみに働くものとする．また，1次元原子鎖は無限に続いているものとし，変位と力の符号を決めるための座標軸を図 3-1 の矢印のように定めるものとする．

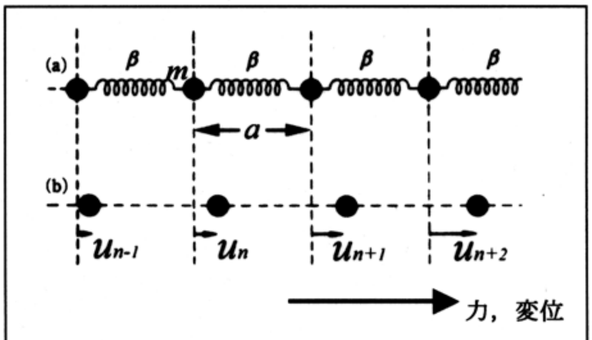

図 3-1　単一原子からなる1次元原子鎖

(a)平衡状態，(b)平衡状態から変位した状態

ある瞬間，n番目の原子は原子振動のために平衡位置からu_n変位した位置にある．このとき，$n+1$および$n-1$番目の原子は，平衡位置よりそれぞれu_{n+1}，u_{n-1}変位した位置にある．nと$n+1$番目の原子間距離はaより $\boxed{①}$ だけ増加することから，n番目の原子は $\boxed{②}$ の力を受ける．同様に，n番目の原子は$n-1$番目の原子との距離に応じた力も受ける．この２つがn番目の原子に作用する力となることから，n番目の原子についての運動方程式

$$m\frac{d^2u_n}{dt^2} = \boxed{③} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot(1)$$

が得られる．式（1）を満足する解は，$u_n = u\cdot\exp[i(nka-\omega t)]$で与えられる弾性波である．ただし，$u$は変位の振幅，$i$は虚数単位，$\omega$は角振動数，$k$の絶対値（$|k|\equiv 2\pi/\lambda$，$\lambda$は波長）は波数であり，$k$の符号は弾性波の進行方向を表す．$u_n = u\cdot\exp[i(nka-\omega t)]$および$u_{n+1}$，$u_{n-1}$についての同様な式を式（1）に代入すると，

$$-m\omega^2u_n = A\cdot u_n, \quad \cdot\cdot\cdot\cdot(2)$$

ただし，$A = \boxed{④}$　　・・・・(3)

が得られる．式（3）の結果を利用し，式（2）が任意のu_nについて成立する条件を，虚数単位iを用いない形式で書き換えると，　$\omega^2 = \boxed{⑤}$　　・・・・(4)

あるいは，　$\omega = \boxed{⑥}$　　・・・・(5)　　となる．

(a) 文章中の $\boxed{①}$ ～ $\boxed{⑥}$ に当てはまる式を答えよ．

(b) 式(5)の結果から，kとωの関係を図示せよ．なお，グラフの横軸はk，縦軸はωとし，$0\leq k\leq 2\pi/a$の範囲で描け．

(c) (b)で描いたグラフにおいて，曲線上の1点と原点を結ぶ直線の傾きは何を意味するか答えよ．

(d) $k=\pi/(5a)$の弾性波における原子の振動の様子を図 3-1(b)にならい，描け．

(e) $k=\pi/a$の弾性波における原子の振動の様子を図 3-1(b)にならい，描け．

(f) 波のエネルギー伝播速度は群速度$v = d\omega/dk$で与えられる．$k=\pi/a$の弾性波の群速度を求めよ．さらに，(e)で描いた原子の振動の様子から，弾性波のエネルギー伝播について説明せよ．

４．次の文章を読んで，設問(a)~(c)に答えよ．

光学的に等方で透明な２つの異なる媒質１と媒質２が，図 4-1 に示すようにある平面で接触している．同じ波長を持つ２つの光を，接触面に垂直な同一の入射面内で，媒質１からそれぞれ向き合う方向で入射し，媒質２の内部で交差させる場合を考える．２つの光が通る接触面上の２点間の距離を $2d$（ただし，$d>0$ で一定の値とする）とし，入射角 θ（$0<\theta<90°$）を図 4-1 のようにとる．ただし，媒質１，２の屈折率はそれぞれ n_1，n_2 で与えられ，入射させる２つの光は接触面に至る前で交差しないものとする．

(a) ２つの光が媒質２の中で交差している場合，交差点の接触面からの距離 f を n_1, n_2, θ, d を用いて表せ．なお，媒質１側で入射角 θ で入射した光の媒質２側への出射角を φ とした場合，スネルの法則 $n_1\sin\theta = n_2\sin\varphi$ が成り立つ．解答には途中の導出過程を省略せずに記述すること．

(b) $n_1 < n_2$，$n_1 > n_2$ のそれぞれの場合について，２つの光が媒質２の中（接触面上も含む）で交差するための θ の条件を求めよ．

(c) n_1, n_2, θ の値によって，２つの光は媒質２の中（接触面上も含む）で交差しなくなる．このとき接触面で起きている現象の名称を答えよ．さらに，このときの２つの光の進み方について説明せよ．

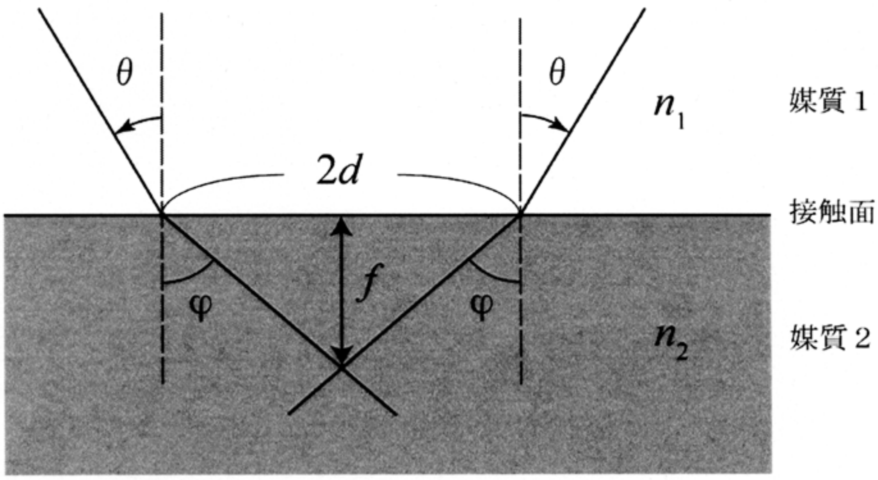

図 4-1

５．反応 $H_2(g) + {}^1/_2O_2(g) = H_2O(g)$ が1000 Kにおいて平衡状態にあるとき，平衡酸素分圧$p(O_2)$を求めるために熱力学データを集めた．その結果，T = 800～1000 Kの温度範囲で$H_2O(g)$の定圧モル比熱が$C_p = (0.009 \times T + 32.8)$ JK^{-1}mol^{-1}で表されることが分かり，また，表5-1の熱力学データが得られた．以下の設問(a)～(e)に答えよ．なお，導出の過程も示し，解答は有効数字3桁で示すこと．ただし，気体は全て完全気体と仮定する．また，自然対数$\ln(x)$と常用対数$\log(x)$の関係を$\ln(x) = 2.30 \times \log(x)$とし，$\ln 2 = 0.693$，$\ln 5 = 1.61$，気体定数$R$ = 8.31 JK^{-1}mol^{-1}とする．

表 5-1 熱力学データ（気体の標準状態の圧力は 1 bar）

	$H_2O(g)$		$H_2(g)$	$O_2(g)$
T / K	H_m° / J mol^{-1}	S_m° / JK^{-1}mol^{-1}	G_m° / J mol^{-1}	G_m° / J mol^{-1}
800	-2.23×10^5	2.25×10^2	-1.13×10^5	-1.73×10^5
1000	①	②	-1.46×10^5	-2.21×10^5

(a) 1000 Kにおける$H_2O(g)$の標準モルエンタルピーH_m°（表中の①）を求めよ．

(b) 1000 Kにおける$H_2O(g)$の標準モルエントロピーS_m°（表中の②）を求めよ．

(c) 1000 Kにおける$H_2O(g)$の標準モルギブズエネルギーG_m°を求めよ．

(d) 1000 Kにおける$H_2O(g)$の標準生成ギブズエネルギー$\Delta_f G^\circ$を求めよ．

(e) 水素0.500 barと水蒸気0.500 barが1000 Kにおいて平衡しているとき，$\log(p(O_2)$ / bar$)$を求めよ．

6．化合物 A，B が反応して化合物 C を生成する

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \xrightarrow{k} \mathrm{C}$$

の反応において，反応速度定数を k，化合物 A，B の初期濃度を X_A，X_B，反応開始から時間 t 経過後の化合物 C の濃度を X とし，反応にともなう体積変化は無視できるとき，化合物 C の生成速度 dX/dt は次の式で与えられるとする．

$$\frac{dX}{dt} = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}] = k\left(X_\mathrm{A} - X\right)\left(X_\mathrm{B} - X\right)$$

すなわち，反応開始から時間 t 経過後の化合物 C の生成速度 dX/dt は，反応速度定数 k と，反応開始から時間 t 経過後の化合物 A，B の濃度[A]，[B]の積で表される．

上記を参考にして，温度 T において化合物 D が分解し化合物 E および F を生成する

$$\mathrm{D} \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} \mathrm{E} + \mathrm{F}$$

の反応について，以下の設問(a)～(f)に答えよ．ただし，k_1 および k_2 は温度 T における正方向および逆方向の反応速度定数，化合物 D の初期濃度を X_D，化合物 E，F の初期濃度を 0 とし，反応にともなう体積変化は無視できるものとする．

(a) 反応開始から時間 t 経過後の化合物 E，F の濃度を X とするとき，dX/dt を表す式を求めよ．

(b) 温度 T で十分長い時間が経過し，反応が平衡状態に到達したときの化合物 E，F の濃度を X_eq とする．このとき k_1，k_2，X_D，X_eq の間に成立する関係を記せ．

(c) 温度 T での平衡状態における化合物 E，F の濃度 X_eq を k_1，k_2，X_D を用いて表せ．

(d) 平衡状態に到達した後，温度 T を ΔT だけ急激に上昇させたところ，図 6-1 に示すように時間の経過とともに化合物 D の濃度[D]は徐々に増加し，化合物 E，F の濃度[E]，[F]は徐々に減少して，温度 $T+\Delta T$ における新しい平衡状態へと変化した．この平衡状態での化合物 E，F の濃度を X'_eq とし，変化の過程で温度上昇から時間 t 経過後の化合物 E, F の濃度を $X'_\mathrm{eq}+\Delta X$ とするとき，化合物 E，F の濃度変化の速度 $d(X'_\mathrm{eq} + \Delta X)/dt$ を表す式を求めよ．ただし，温度 $T + \Delta T$ における正方向および逆方向の反応速度定数を k'_1 および k'_2 とする．

(e) 温度 $T+\Delta T$ での平衡状態に到達する過程における ΔX の変化速度 $d(\Delta X)/dt$ を k'_1，k'_2，X'_eq，ΔX を用いて表せ．ただし，ΔX は X'_eq に比べ十分小さく，$(X'_\mathrm{eq} + \Delta X)^2 \approx (X'_\mathrm{eq})^2 + 2X'_\mathrm{eq}\Delta X$ と近似できるものとする．

(f) 温度が T から $T+\Delta T$ に変化してから時間 t 経過したときの化合物 D，E，F の濃度[D]，[E]，[F]を t，k'_1，k'_2，X_D，X_eq，X'_eq を用いて表せ．

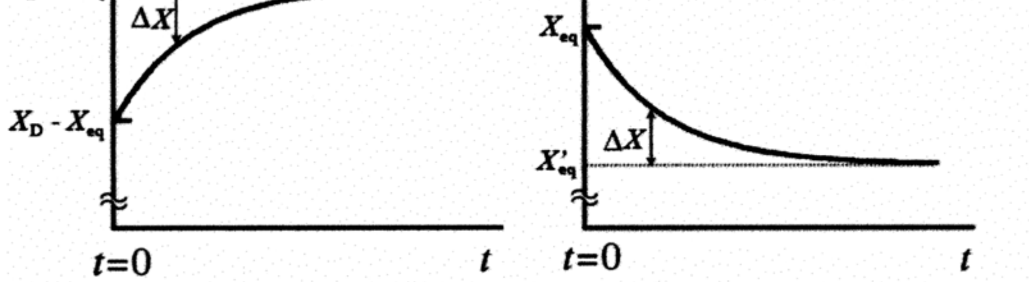

図 6-1