専門科目（午後）　　　　　　　　　　　　２３　大修

材料物理科学（物理系）　　　　　時間　13 : 30　～　16 : 00

物質科学創造（物理系）

注意事項

１．２つの問題全てに解答せよ。

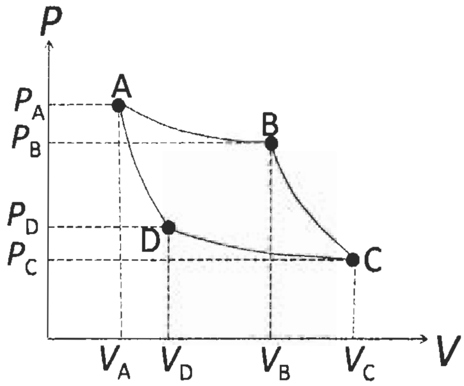
２．解答は１問題ごとに２枚の解答用紙を使って別々に記入せよ。必要ならば、その旨記して裏に書いてもよい。

３．各解答用紙には必ず問題の番号および受験番号を記入せよ。

４．各解答用紙は、解答を記入していないものも含めて全て提出せよ。

[1] 以下の問に答えよ。

(a) シリンダーに1モルの理想気体が閉じ込められている。この理想気体に対し、右図に示すA→B、B→C、C→D、D→Aの4つの準静的な過程からなるサイクルを考える。ここでA→Bはシリンダーを温度 T_2 の高温熱源に接触させ、熱的平衡を保ちながら等温膨張させる過程、B→Cはシリンダーを熱源から離し、断熱膨張させて温度を T_1 (< T_2) まで下げる過程、C→Dはシリンダーを温度 T_1 の低温熱源に接触させ、熱的平衡を保ちながら等温圧縮させる過程、D→Aはシリンダーを熱源から離し、断熱圧縮させて元の状態Aに戻す過程である。気体の圧力を P、体積を V、温度を T、気体定数を R、定圧モル比熱 C_P と定積モル比熱 C_V の比 C_P/C_V を γ として以下の問に答えよ。



(1) 上記のサイクルA→B→C→D→Aは何と呼ばれるサイクルか。その名称を答えよ。

(2) A→Bにおいて、シリンダー内の理想気体がした仕事 W_{AB} を求めよ。

(3) 断熱過程においては、理想気体の圧力 P と体積 V の間に PV^{γ} =一定の関係が成り立つことを示せ。

(4) 上に示した PV 線図で、等温過程における曲線の変化率 $|dP/dV|$ が断熱過程における曲線の変化率 $|dP/dV|$ よりも小さいのは何故か。理由を述べよ。

(5) 一般に、気体の内部エネルギー U、圧力 P、体積 V、温度 T の間には、

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$ が成り立つことを証明せよ。

(6) 等温過程 A→Bにおけるシリンダー内の理想気体のエントロピー S の変化を求めよ。

(7) 上図のサイクルA→B→C→D→Aにおいて、シリンダー内の理想気体が温度 T_2 の高温熱源から与えられる熱量 Q_2 と、温度 T_1 の低温熱源に与える熱量 Q_1 の比は $Q_2/Q_1 = T_2/T_1$ となることを示せ。

＜次ページに続く＞

(b)　量子化された１次元調和振動子のエネルギー固有値は、固有角振動数ωを用い

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

（n=0,1,2・・・）

と表される。ただし$\hbar$はプランク定数 h を 2π で割ったものである。この１次元調和振動子は温度Tにおいて熱平衡状態にあるものとする。ボルツマン定数を k として以下の問に答えよ。

(8)　１次元調和振動子のエネルギーがE_nである確率f_nを求めよ。

(9)　１次元調和振動子のエネルギー期待値$\bar{E}$を求めよ。

(10)　温度Tにおける１次元調和振動子の比熱$C \equiv \dfrac{d\bar{E}}{dT}$を求めよ。また、この結果を用いて、$C$は十分高温において$k$となることを示せ。

[2] 以下の問に答えよ。ただし、プランク定数hを2πで割ったものを$\hbar$とする。

(a) 1次元の無限に深い井戸型ポテンシャル（井戸の幅をLとする）に束縛された質量mの粒子を考える。

（1） 束縛された粒子のエネルギー固有値を求めよ。

（2） 束縛された粒子の規格化されたエネルギー固有関数を求めよ。

（3） 最も低いエネルギー状態とその次に低いエネルギー状態の固有関数を図示せよ。

（4） 井戸の幅Lが$L/2$になるとエネルギー固有値がどうなるか説明せよ。

(b) 質量m、角振動数ωの1次元調和振動子を考える。運動量演算子$\hat{p}$、位置演算子$\hat{q}$を用いるとハミルトン演算子$\hat{H}$は

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2 \tag{i}$$

と表される。ここで、$[\hat{q},\hat{p}] = \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar$である。ただし、$i$を虚数単位とする。

2つの演算子

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{q} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}), \qquad \hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{q} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}) \tag{ii}$$

を考える。この演算子を用いるとハミルトン演算子は

$$\hat{H} = \left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \text{となる。} \tag{iii}$$

次にエルミート演算子$\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$を用いると

$$\hat{H} = \left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{iv}$$

となる。$\hat{n}$の固有値をn、規格化された固有関数を$|n\rangle$とすると、

固有方程式$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$のエネルギー固有値$E_n$は

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad \text{ただし}\ (n = 0,1,2,\cdots) \tag{v}$$

で与えられる。

（5） 交換関係が$[\hat{a},\hat{a}^+] = 1$となることを示せ。

（6） (i)式と(ii)式から(iii)式を導け。

（7） 状態$|n\rangle$に演算子$\hat{a}^+$、$\hat{a}$を作用すると

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$
$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

となることを示せ。

（8） $n=0$の状態を$|0\rangle$とするとき、$|n\rangle$状態を演算子$\hat{a}^+$と$|0\rangle$で表せ。

<次ページに続く>

(c)　質量 m、角振動数 ω の1次元調和振動子を考える。位置座標を q、運動量を p とすると、その古典的なエネルギーは

$$E = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

と書ける。

（９）位相空間 (p,q) において、 E =一定である運動は p 軸方向への半径が $\sqrt{2mE}$ 、q 軸方向への半径が $\sqrt{2E/m\omega^2}$ の楕円軌道で表される。$E = E_n$ の場合のこの楕円の面積 A_n を求めよ。またこれを利用して $A_{n+1} - A_n = h$ となることを示せ。
ただし、 E_n は前問の(v)式で与えられる。

（１０）温度 T においてエネルギー $\overline{E} \cong kT$（ただし k はボルツマン定数）を持った古典的な1次元調和振動子の運動に対する位相空間内の楕円軌道の面積は $A = \dfrac{2\pi kT}{\omega}$ で与えられることを示せ。またこの面積を h と比較することにより、固体中の典型的なフォノン振動に対する角振動数 ω=6.28×10^{12} (s^{-1})を持った1次元調和振動子を量子論的に扱わなければいけない温度範囲を評価せよ。
ただし、 h =6.62×10^{-34} (J·s) 、 k =1.38×10^{-23} (J·K^{-1})とする。