専門科目（午前）　　　　　　　　　　　　　２３　大修

材料物理科学（物理系）　　　　　　　　　時間　9：30　～　12：00

物質科学創造（物理系）

注意事項

１．３つの問題全てに解答せよ。

２．解答は１問題ごとに１枚の解答用紙を使って別々に記入せよ。必要ならば、その旨記して裏に書いてもよい。

３．各解答用紙には必ず問題の番号および受験番号を記入せよ。

４．各解答用紙は、解答を記入していないものも含めて全て提出せよ。

[1] 以下の問 (a) から (c) に答えよ。

(a) t を独立変数とする $x(t)$、$y(t)$ に関する連立常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = x + 3y + t,\quad \frac{dy}{dt} = 3x + y + t$$

について、以下の問に答えよ。

(1) $x+y$ が満たす常微分方程式を求めよ。

(2) (1) の常微分方程式を解いて $x+y$ を求めよ。

(3) x、y をそれぞれ求めよ。

(b) 行列 A と実ベクトル $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ が

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

として与えられるとき、以下の問に答えよ。

(4) $A\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}$ の内積 $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ を x_1、x_2、x_3 を用いて表せ。

(5) A の固有値とそれぞれの固有値に対応する正規化した固有ベクトルを求めよ。

(6) 直交変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ によって $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ を

$$\alpha_1 {y_1}^2 + \alpha_2 {y_2}^2 + \alpha_3 {y_3}^2 \qquad (\alpha_1、\alpha_2、\alpha_3 \text{は実数})$$

の形にすることができる。行列 P を求めよ。

(c) 区間 $[-L, L]$ で定義された関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$$

の Fourier 級数に展開することができる。ここで、a_0、a_n、b_n は Fourier 係数である。区間 $[0, 2]$ で $f(x) = x$ であるとき、以下の問に答えよ。

(7) $f(x)$ が余弦関数 $\cos \frac{n\pi x}{L}$ だけを含む級数で展開できるとき、区間 $[-2, 2]$ における $f(x)$ と x の関係をグラフに図示せよ。

(8) 余弦関数 $\cos \frac{n\pi x}{L}$ だけを含む級数で $f(x)$ を展開せよ。

(9) Fourier 係数 a_0、a_n、b_n の間に

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)^2 dx = (\frac{a_0}{2})^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

の関係が成り立つことを利用して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots$$

を求めよ。

[2] 半径a、質量mの太さの無視できる一様な円輪がある。図1のように、これを粗い水平面上で、その中心軸のまわりに回転させた。時刻$t=0$のときの角速度をω_0とし、その後円輪が止まるまでの時間をT_0とする。以下の問に答えよ。ただし、円輪は剛体と見なしてよく、中心軸は鉛直とする。また、重力加速度をg、水平面との動摩擦係数をμ'とする。

(1) 中心軸のまわりの円輪の慣性モーメントを求めよ。

(2) 円輪に働く摩擦力の方向を答えよ。

(3) 円輪に働く摩擦力のモーメントの総和を求めよ。

(4) 空気抵抗は無視できるものとして、T_0を求めよ。また、時刻$t=0$から止まるまでの間に円輪が回転した回数n_0を求めよ。

次に、空気抵抗により、この円輪の回転を止めようとする大きさ$m\gamma a\omega$の力のモーメントが働くとする。以下の問に答えよ。ただし、γは一定とし、ωは円輪の角速度とする。

(5) 時刻$t=0$のときの角速度をω_0とし、その後円輪が止まるまでの時間Tが、

$$T=\frac{a}{\gamma}\log_e\left(1+\frac{\gamma\omega_0}{\mu' g}\right)$$

と表されることを示せ。必要ならば、以下の積分公式を用いても良い。

積分公式：$\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\log_e|ax+b|+C$　ただし、Cは積分定数、$a\neq 0$とする。

また、$\gamma\to 0$のとき、TがT_0となることを示せ。

(6) 図2の自然対数のグラフを用いて、$T=\frac{1}{3}T_0$を満たすγは、$\frac{\mu' g}{\omega_0}$のおよそ何倍であるか見積もれ。

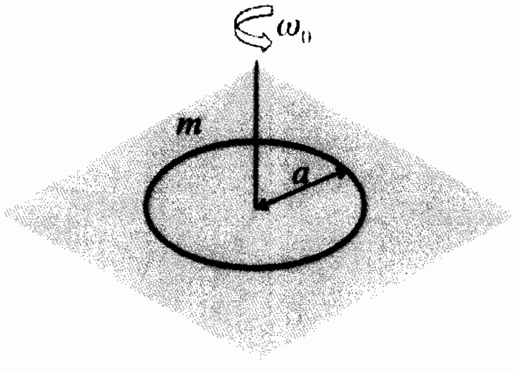

図1

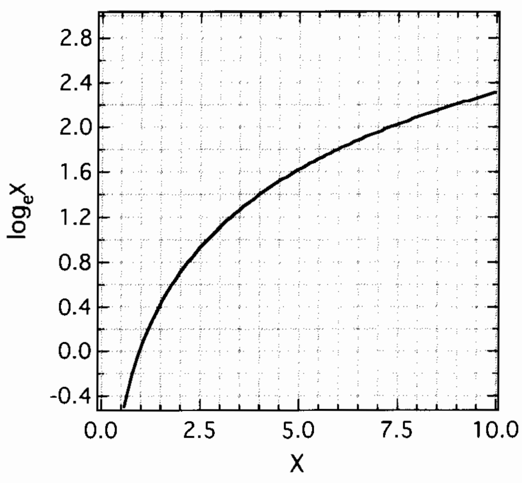

図2

[3] 面積 S で同形の電極板 2 枚を間隔 d で平行に配置したコンデンサ(図 1)と図 1 のコンデンサの電極板と同形・同面積で誘電率ε、厚さ t の誘電体板を電極板と平行に入れたコンデンサ(図 2)を真空中に置く。以下の問に答えよ。ただし、真空の誘電率をε_0とする。また、コンデンサ端部の影響は無視できるものとする。

(a) 図 1 のコンデンサの二つの電極にそれぞれ $+Q$、$-Q$ の電荷を与えた。

(1) このコンデンサの静電容量を求めよ。

(2) このコンデンサに蓄えられた静電エネルギーを求めよ。

(b) 図 2 のコンデンサの二つの電極にそれぞれ $+Q$、$-Q$ の電荷を与えた。

(3) このときの静電容量を求めよ。

(4) このコンデンサに蓄えられた静電エネルギーを求めよ。

(5) 電極板間に作用する力の大きさを求めよ。その力は斥力か引力か、またその力の大きさは誘電体板を入れた場合と入れない場合とでどちらが大きいかを答えよ。

(c) 図 2 のコンデンサに一定電圧 V を印加した。このとき電極板間に作用する力を F とする。

(6) 電極板の間隔を d から $d+\Delta d$（Δd は微小変位とする）にしたとき、電極板の電荷の増加量をΔQとして、このコンデンサに加えられたエネルギーΔU をΔd、F、V、ΔQ を用いて表わせ。

(7) 電極板間に作用する力 F の大きさを求めよ。その力は斥力か引力か、またその力の大きさは誘電体板を入れた場合と入れない場合とでどちらが大きいかを答えよ。

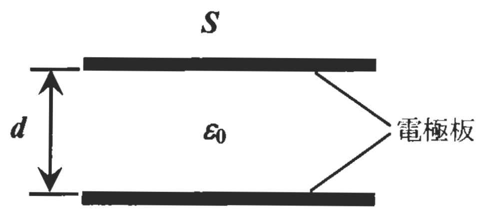

図 1

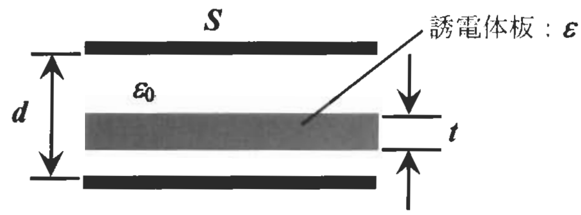

図 2