専門科目（午前）　　　　　　　　　　　　　２２　大修

材料物理科学（物理系）　　　　　　　時間　9：30　～　12：00

物質科学創造（物理系）

注意事項

１．３つの問題全てに解答せよ。

２．解答は１問題ごとに１枚の解答用紙を使って別々に記入せよ。必要ならば、その旨記して裏に書いてもよい。

３．各解答用紙には必ず問題の番号および受験番号を記入せよ。

４．各解答用紙は、解答を記入していないものも含めて全て提出せよ。

[1] 以下の文章の $\boxed{1}$ - $\boxed{16}$ に当てはまる適当な数式または値を、導出過程も含めて答えなさい。ただし、i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする。

(a) 実変数 x_1、x_2、x_3 に関する二次形式

$$F(x_1,x_2,x_3) = 5{x_1}^2 + 5{x_2}^2 + 3{x_3}^2 - 4x_1x_2$$

は、次の実ベクトル $\boldsymbol{x}$ と実対称行列 A を用いて、$F(x_1,x_2,x_3) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と表すことができる。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \boxed{1}$$

ここで、${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置ベクトルを表す。一方、行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$（$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$）と書くことにすると、それぞれの固有値に属する正規化した固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u}_1 = \boxed{2}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boxed{3}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boxed{4}$$

となる。この結果を利用すると、二次形式 $F(x_1,x_2,x_3)$ を直交行列 $P = \boxed{5}$ によって主軸変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ をすることで

$$F(x_1,x_2,x_3) = G(y_1,y_2,y_3) = \boxed{6}\,{y_1}^2 + \boxed{7}\,{y_2}^2 + \boxed{8}\,{y_3}^2$$

の形にすることができる。ただし、実ベクトル $\boldsymbol{y}$ は

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

である。

(b) t を独立変数とする x, y に関する連立常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2y + 3x = 0 \\ 7x + \dfrac{dy}{dt} - 2y = f(t) \end{cases} \tag{i}$$

の一般解を求めるには、式 (i) から y を消去して、x のみに関する常微分方程式

$$\boxed{9} = f(t) \tag{ii}$$

を求め、それを解けばよい。その結果、式 (ii) の補助方程式の一般解と式 (ii) の一つの特解が、それぞれ $x_c(t)$、$x_p(t)$ と書けるとすると、式 (ii) の一般解は、$x(t) = \boxed{10}$ と表すことができる。また、具体的に式 (ii) において $f(t) = e^{-5t}$ のときには、$x_c(t)$ と $x_p(t)$ がそれぞれ

$$x_c(t) = \boxed{11}, \quad x_p(t) = \boxed{12}$$

と求められる。y の一般解については、x の一般解を式 (i) に代入して求めればよい。

＜次ページに続く＞

(c) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ と書くことにすると、関数 $g(t) = f(t)\cos\omega_0 t$ (ω_0 は実定数) のフーリエ変換 $G(\omega)$ は、$F(\omega)$ を用いて

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega_0 t\, e^{-i\omega t} dt = \boxed{13}$$

と表すことができる。これを利用して

$$f(t) = e^{-|t|}$$

のときの関数 $g(t)$ のフーリエ変換 $G(\omega)$ を求めたい。そのためには、$f(t) = e^{-|t|}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が $F(\omega) = \boxed{14}$ となることを用いればよい。これにより、直ちに $G(\omega) = \boxed{15}$ と求めることができる。

また、$f(t)$ と $F(\omega)$ の間に

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

の関係式が成り立つことを利用すれば、次の定積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \boxed{16}$$

を計算することができる。

［2］ 半径aで、質量Mの一様な薄い半円板がある。図１のように、半円板を円心Oでなめらかに回転できるように壁に固定し、鉛直にぶら下げた。回転軸は半円板の面に垂直とする。以下の問に答えよ。ただし、半円板は剛体と見なしてよい。また、重力加速度をgとし、空気の抵抗は無視できるものとする。

(1) この半円板の重心をGとする。OGの長さLを求めよ。

(2) 図２のように、半円板が平衡位置から角度θだけ回転した。このときの平衡位置からの位置エネルギー変化を求めよ。

次に、この半円板の回転軸の周りの微小振動を考える。

(3) 円心Oを通り、半円板に垂直な軸に関する慣性モーメントI_O、および円心Oを回転中心とする回転エネルギーを求めよ。ただし、θの時間微分$\dot{\theta}$を用いても良い。

(4) (2)と(3)でそれぞれ求めた位置エネルギーと回転エネルギーの和は保存される。このことから、この微小振動の周期をM、a、gを用いて表せ。

(5) 図３のように、半円板の代わりに質量Mの質点を、(1)で求めた長さLの質量の無視できるひもで吊るした。この振り子の微小振動の周期を求めよ。

(6) (4)、(5)で求めた２つの周期は異なる。その物理的意味を述べよ。

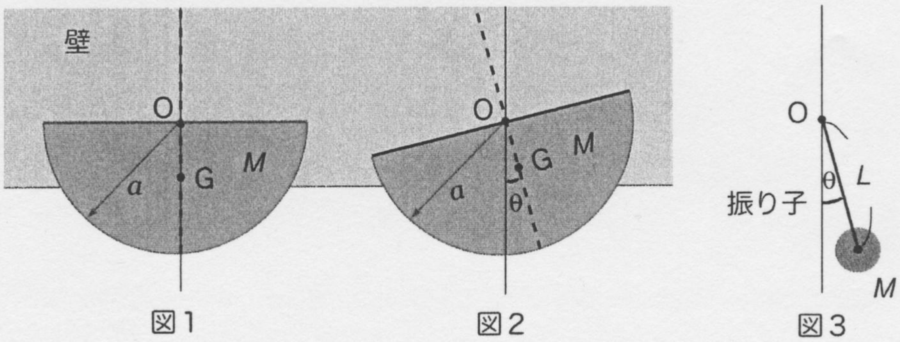

図１　図２　図３

[3]　図 1 に示すように、半径 a の導体球と内半径 b、外半径 c（$a < b < c$）の導体球殻が同じ点を中心として真空中に置かれている。以下の問に答えよ。ただし、真空の誘電率を ε_0 とする。

(a)　導体球に正の電荷 Q を与えた。

(1) 導体球殻の内表面および外表面に誘起される電荷をそれぞれ求めよ。

(2) 導体球の中心からの距離を r とし、電場の大きさを r の関数 $E(r)$として求めよ。また $E(r)$のグラフを書け。

(b)　導体球に正の電荷 Q_1、導体球殻に正の電荷 Q_2 を与えた。

(3) 導体球殻の内表面および外表面に誘起される電荷をそれぞれ求めよ。

(4) 導体球の表面の電位 V_a、導体球殻の内表面の電位 V_b、および外表面の電位 V_c をそれぞれ求めよ。ただし、導体から無限に離れた点の電位を 0 とする。

(c)　導体球を接地し、導体球殻に正の電荷 Q を与えた。

(5) 導体球の表面に誘起される電荷を求めよ。

(6) 導体球殻の外の空間における静電場のエネルギー密度 $u_o(r)$と、導体球と導体球殻の間の空間における静電場のエネルギー密度 $u_i(r)$をそれぞれ求めよ。

(7) この導体系が置かれた空間全体にたくわえられた静電場のエネルギーを求めよ。

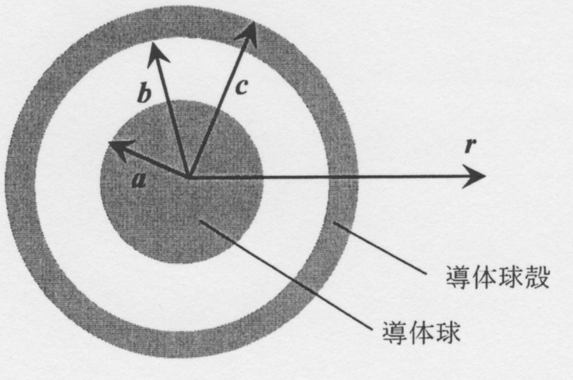

図 1