専門科目（午前）　　　　　　　　　　　　２１　大修

材料物理科学（物理系）　　　　　　　　時間 9：30～12：00

物質科学創造（物理系）

注意事項

１．　３つの問題全てに解答せよ。

２．　解答は１問題ごとに１枚の解答用紙を使って別々に記入せよ。必要なら、その旨記して裏に書いてもよい。

３．　各解答用紙には必ず問題の番号および受験番号を記入せよ。

４．　各解答用紙は、解答を記入していないものも含めて全て提出せよ。

[1] 次の問に答えよ。ただし、x、y、z、f、t は実変数とする。

(a) 次の x、y、z に関する連立方程式と係数行列 A による線形変換に関する以下の問に答えよ。ただし、a、b は実数とする。

$$\begin{aligned} x+by+2z&=0 \\ ax+b^2y+4z&=0 \\ a^2x+b^3y+8z&=0 \end{aligned} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ a & b^2 & 4 \\ a^2 & b^3 & 8 \end{pmatrix}$$

(1) この連立方程式がただ1組の解を持つための a、b についての条件を求めよ。

(2) 直交座標系（x, y, z）において、原点を起点とする任意の位置ベクトルを係数行列 A により線形変換する。a、b が(1)の条件を満たさない場合に、位置ベクトルが A により変換された後のベクトルの終点が満たす方程式をすべて求めよ。

(b) 直交座標系（x, y, z）において、次の図形の体積を求めよ。

(3) $-a \le z \le a$ の範囲で、球 $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ と円柱 $x^2+y^2 \le b^2$ の共通する部分。ただし、$a>b>0$ とする。

(4) 円柱 $x^2+y^2 \le b^2$ の $0 \le z \le x$ の部分。ただし、$b>0$ とする。

(c) 次の実関数 $F(x,y)$ の極値を求めよ。

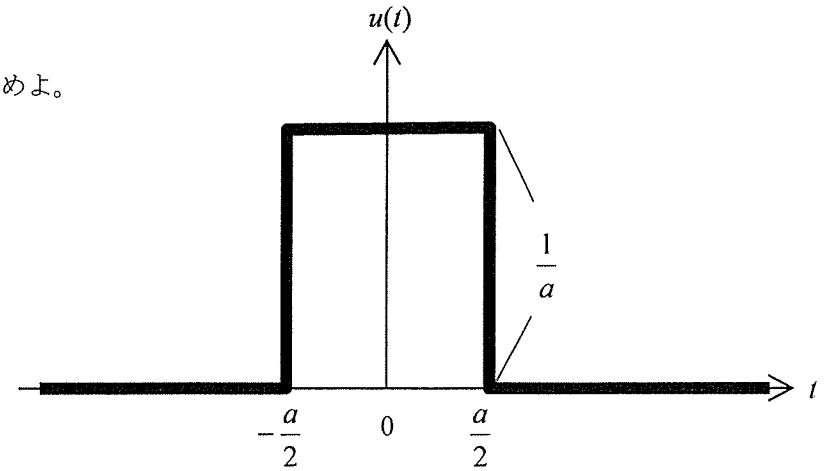
(5) $F(x,y)=4xy-2y^2-x^4$

(6) $F(x,y)=xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

(d) 下図に示す実関数 $u(t)$ について以下の問に答えよ。i は虚数単位である。ただし、$a>0$ とする。

(7) $X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\exp(-i2\pi ft)dt$ を求めよ。

(8) $\lim_{a\to+0} X(f)$ を求めよ。



[2]　２つの質点（質点A、質点B）が運動している系について考える。ここで質点Aの質量をm_a、質点Bの質量をm_bとする。以下の問に答えよ。

(a)　質点間の距離がrのときの、この系のポテンシャルエネルギーを$V(r)=\dfrac{1}{2}k(r-l)^2$とする。

ただしkとlは正の定数とし、lは２つの質点間のつりあいの距離である。時刻$t=0$で２つの質点の速度は０であり、その時の質点間の距離をr_0とする。ただし$0<r_0-l<<l$とする。このとき、時刻tにおける質点の運動について考えることにする。（図１参照）

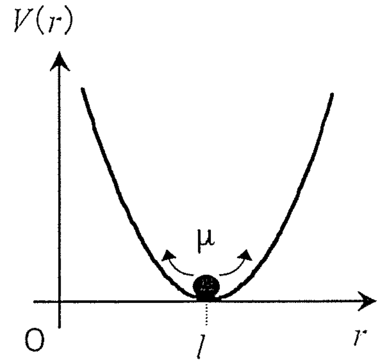


図１

(1) ２つの質点に関する換算質量μをm_aとm_bを用いて求めよ。
(2) 換算質量μとポテンシャルエネルギー$V(r)$を用いて、２つの質点の相対運動に対する運動方程式を求めよ。
(3) 時刻$t>0$における質点間の距離$r(t)$を求めよ。
(4) 時刻$t>0$における運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを求めよ。

(b)　２つの質点はx軸上だけで運動するものとする。質点 A の座標をx_1、質点 B の座標をx_2とするとき（図２）、この系のポテンシャルエネルギーが

$$V(x_1,x_2)=\frac{k}{2}\{(x_1-l)^2+(x_2-x_1-l)^2+(2l-x_2)^2\}$$

の場合について考える。ただしkとlは正の定数で、$0<x_1<x_2<3l$とする。以下の問に答えよ。

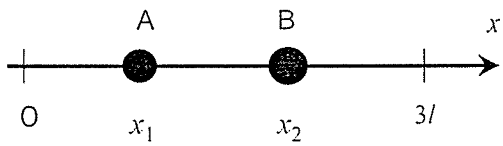


図２

(5) つりあいの位置（２つの質点に作用する力が０になるような位置）における質点Aの座標x_1と質点Bの座標x_2を求めよ。
(6) ２つの質点がつりあいの位置から変位して微小振動するとき、２つの質点に関する運動方程式を求めよ。このとき、つりあいの位置からの質点Aの変位をδ_1、つりあいの位置からの質点Bの変位をδ_2とせよ。
(7) ２つの質点が同一の振動数で微小振動するとき、その振動数を求めよ。
(8) ２つの質点が (7)で求めた振動数で運動するとき、２つの質点の変位δ_1、δ_2の間の関係式を求め、２つの質点が運動する方向を図示せよ。ただし、ここでは$m_a=m_b$の場合について考えよ。

[3] 厚さが無視でき無限に広い 2 枚の平行な平面導体板の間に均一な厚さの平板状の誘電体 1 と誘電体 2 が挟まれている。図 1 は、このような多層板の面に垂直な断面図の一部を表している。ここで、誘電体 1 は厚さが l_1 [m]で誘電率が ε_1 [F/m]であり、誘電体 2 は厚さが l_2 [m]で誘電率が ε_2 [F/m]である。また、$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ であり、上側および下側の平面導体板にはそれぞれ単位面積当り $+\rho$ [C/m^2] および $-\rho$ [C/m^2]の電荷が与えられている。このとき、図 1(a)に示すように、時刻 $t = 0$ [s]では $l_1 = a$ [m]および $l_2 = b$ [m]であり、誘電体 1 と誘電体 2 の界面には界面に垂直な方向(x 軸方向)に単位面積当り f [N/m^2]の大きさの力が作用している。また、大きさ f の力に起因して、図 1(b)に示すように、$l_1 + l_2 = a + b$ の関係を満たしながら誘電体 2 が誘電体 1 へ変化し、界面が速さ v [m/s]で移動している。以下の問に答えよ。

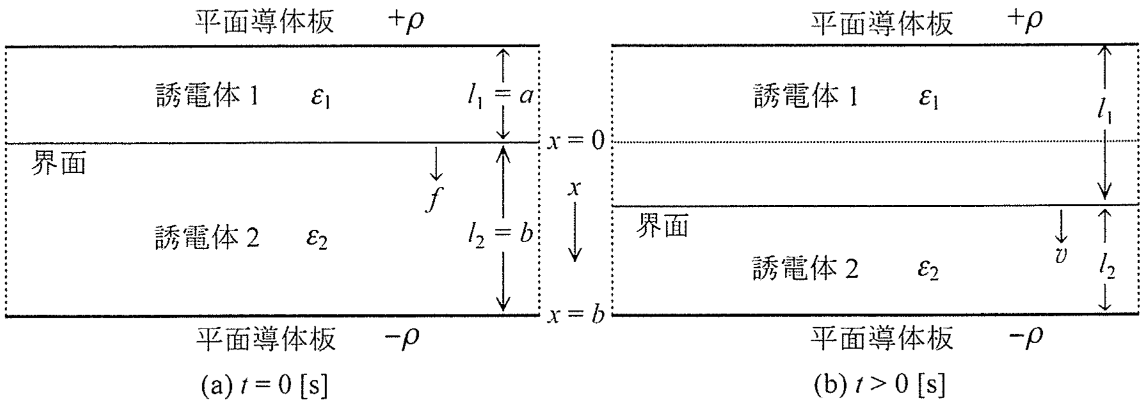


図 1. 2 枚の平行な平面導体板に挟まれた平板状の誘電体 1 と誘電体 2

(1) $t = 0$ における誘電体 1 および誘電体 2 の内部の電束密度の大きさ D_1 [C/m^2] および D_2 [C/m^2]を求めよ。

(2) $t = 0$ における誘電体 1 および誘電体 2 の内部の電場の大きさ E_1 [V/m] および E_2 [V/m]を求めよ。

(3) $t = 0$ における 2 枚の平面導体板の間の電位差 V[V]を求めよ。

(4) $t = 0$ における 2 枚の平面導体板の間の単位面積当りの静電容量 C [F/m^2]を求めよ。

(5) $t = 0$ における 2 枚の平面導体板の間に蓄えられている単位面積当りの静電エネルギー W[J/m^2]を求めよ。

(6) $t > 0$ における W を界面の位置 x [m]の関数として表せ。ただし、$t = 0$ において $x = 0$ であり、界面の移動する向きを x の正の向きとする。

(7) 上記(6)の結果に基づき、f を求めよ。

(8) 界面の易動度を M [m^3/Ns]とすると、誘電体 2 が消滅するまでの時刻 $t > 0$ において、v と f の間に $v = Mf$ の関係が成立する。ここで、M は定数である。上記(7)の結果に基づき、$0 \leq x \leq b$ の範囲の時刻 t における界面の位置 $x(t)$を求めよ。また、この結果に基づき、時刻 t における $W(t)$を求めよ。

(9) $x = 0$ における W の値 W_0 と $x = b$ における W の値 W_b の差 $\Delta W = W_0 - W_b$ は、界面移動による単位面積当りの消費エネルギーを表している。この ΔW を求めよ。