

専門科目（午後）

20 大修

材料物理学 A

時間 13:30～16:00

物質科学創造 D

注意事項

1. 3つの問題全てに解答せよ。
2. 解答は1問題ごとに別々の解答用紙に記入せよ。必要なら、その旨記して裏に書いてもよい。
3. 各解答用紙には必ず問題の番号および受験番号を記入せよ。
4. 各解答用紙は、解答を記入していないものも含めて全て提出せよ。

- [1] x 方向に進行する質量 m の粒子が図 1 の 1 次元ポテンシャル $V(x)$ に運動エネルギー E で入射するときの透過確率について考えたい。以下の問に答えよ。

- (a) 1 次元ポテンシャル $V(x)$ において $V_2=0$ の場合 (図 2) について考える。ここで、 w と V_1 は 0 より大きい有限の値とする。

- (1) 図 2 のように質量 m の粒子が入射する場合に、質量 m の粒子を記述する時間に依存しないシュレディンガー方程式を考え、次の領域 (i), (ii), (iii) の波動関数をそれぞれ $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$ とする。

領域 (i) : $x < -w$

領域 (ii) : $-w \leq x < 0$

領域 (iii) : $0 \leq x$

このとき、領域 (i) と (ii) の境界、および (ii) と (iii) の境界において波動関数 $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$ が満たすべき連続条件の式を求めよ。

- (2) $0 \leq E \leq 2V_1$ の範囲において運動エネルギー E と透過確率の関係を表すグラフの概略をかけ。
- (3) $E < V_1$ のときの透過確率を求めよ。

- (b) 1 次元ポテンシャル $V(x)$ において $V_1=V_2=\infty$ で $w=\infty$ のとき (図 3)、すなわち質量 m の粒子が幅 d の無限に深い井戸型ポテンシャル $V(x)$ に閉じ込められている場合を考える。

- (4) この粒子のエネルギー固有値を求めよ。
- (5) 規格化されたエネルギー固有関数を求めよ。
- (6) 井戸の幅 d が半分になったときエネルギー固有値の間隔はどうか述べよ。

- (c) 質量 m の粒子が図 1 の 1 次元ポテンシャル $V(x)$ に運動エネルギー E で入射するときを考える。ただし、ポテンシャルの高さは $V_1=V_2>0$ で十分大きい有限の値とし、

$0 < x < d$ においてエネルギー準位 E_1 , E_2 と E_3 を持つ仮想束縛状態が存在するものとする。また $0 < E_1 < E_2 < E_3 < V_1$ とする。仮想束縛状態とは、厳密な意味での束縛状態ではないがある程度長い時間にわたって継続する一時的な束縛状態といえる状態のこととして考えよ。

- (7) $0 < E < E_3$ の範囲において運動エネルギー E と透過確率の関係を表すグラフの概略をかけ。

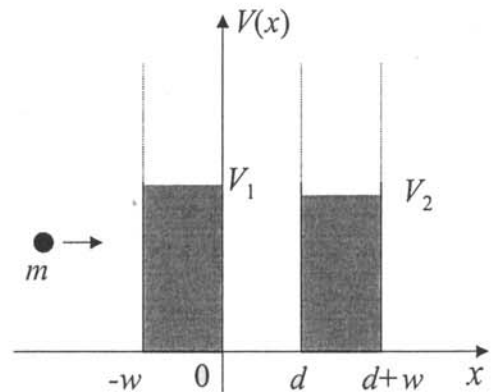


図 1

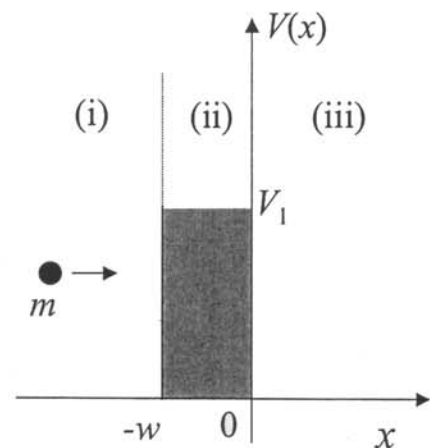


図 2

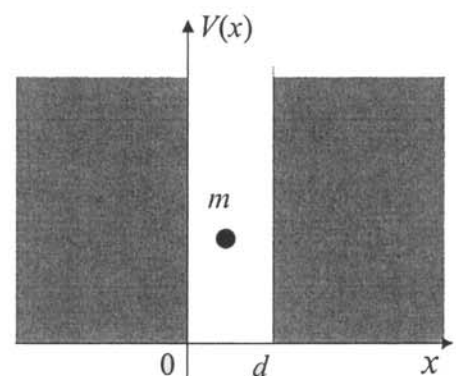


図 3

- [2] 座標 $\mathbf{r}(x,y,z)$ の点 $\mathbf{P}$ で時刻 t に観測される電磁ポテンシャルは、いろいろな場所 $\mathbf{r}'(x',y',z')$ にある時刻 $t' (= t - R/c)$ での電荷密度 ρ や電流密度 $\mathbf{J}$ のつくるクーロン形のポテンシャルの重ね合わせとして、式 (i)、(ii) の形で書ける。

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' \quad \dots \dots (i)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' \quad \dots \dots (ii)$$

ただし、 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ とする。また、 ϵ_0 、 μ_0 はそれぞれ真空の誘電率、透磁率、 c は真空中の光速とする。

図のような直交座標系で、座標 $(0,0,a)$ に電荷 $q(t')$ の点電荷、 $(0,0,-a)$ に $-q(t')$ の点電荷を配置する。ただし、 $q(t')$ は、 $q_0 \exp(i\omega t')$ の実部のように時間変化するものとする。 a が原点 O から観測点 $\mathbf{P}$ までの距離 r とくらべて十分小さい時この点電荷対は双極子とみなせる。この双極子が作る電磁場について以下の間に答えよ。

- (1) $\omega = 0$ のとき、この双極子が観測点 $\mathbf{P}$ に作る電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の x, y, z 成分を求めよ。

- (2) $\omega \neq 0$ のとき、この振動する双極子が観測点 $\mathbf{P}$ に作る磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ の強さが、

$$|\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)| = \frac{\mu_0}{4\pi} (2aq_0\omega) \cdot \left| \frac{1}{r^2} \sin(\omega(t - r/c)) + \frac{\omega}{rc} \cos(\omega(t - r/c)) \right| \sin\theta$$

となることを示せ。また、観測点 $\mathbf{P}$ が x 軸上にあるとき、観測される磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ の方向を答えよ。

ここで、上式の r 、 θ は、点 $\mathbf{P}$ を図のように極座標表示 (r, θ, φ) で表した r 、 θ である。

- (3) (2) で求めた式から、振動する双極子が作る磁場には、距離 r に対して 2 乗に反比例する項と 1 乗に反比例する項の 2 つが存在することがわかる。 $ct \gg r$ の場合、距離 r に対して 2 乗に反比例する項は、下記の { } 内の選択肢のどの法則に対応するか、最も適当なものを選び。

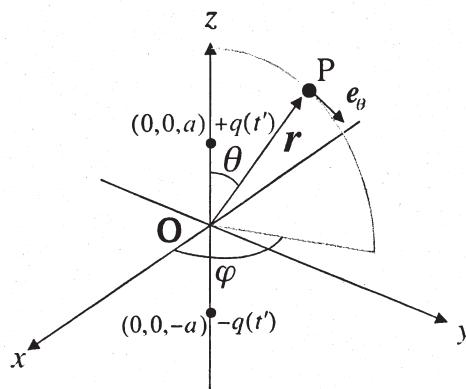
{フレミングの法則、レンツの法則、ビオ・サバールの法則、ファラデーの法則}

- (4) 同様に、この振動する双極子が作る電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ にも、向きが図中の $\mathbf{e}_\theta$ 方向で、距離 r に反比例する項

が含まれる。このように距離 r に反比例する電場と磁場は放射電磁場と呼ばれる電磁波である。このことから、観測点 $\mathbf{P}$ での放射電場の強さを求めよ。

- (5) この放射電磁場によるポインティングベクトル $\mathbf{S}$ の向きを求めよ。

- (6) この振動双極子から放射される時間平均された単位立体角あたりの放射エネルギーの大きさを求めよ。



- [3] 磁気モーメント μ を持つ N 個の区別できる粒子が、平面の上に固定され 1 次元環状鎖 G を作っている。この 1 次元環状鎖 G は絶対温度 T の熱浴に接し、強さが B の一様な外部磁場の中にある。それぞれの磁気モーメントは、外部磁場に平行または反平行のいずれかの状態をとり、平行の場合に $-\mu B$ 、反平行の場合に μB のポテンシャルエネルギーを持つ。また、隣接した粒子の間には相互作用があり、磁気モーメントの向きが互いに平行のときに $-J/2$ 、反平行のときに $J/2$ のエネルギーを持つ ($J > 0$)。その結果、この 1 次元環状鎖 G の全エネルギー E は

$$E = -\frac{J}{2} \sum_{i=1 \dots N} \sigma_i \sigma_{i+1} - \mu B \sum_{i=1 \dots N} \sigma_i \quad (i)$$

と表される。ここで、 σ_i は i 番目の粒子の磁気モーメントの方向を表す指標であり、外部磁場に平行のとき $+1$ 、反平行のとき -1 をとる。また、 $\sigma_{N+1} \equiv \sigma_1$ である。ボルツマン定数を k_B として、以下の問に答えよ。

- (a) N 個の粒子のうち、外部磁場に平行な磁気モーメントを持つ粒子の数が N_+ 個、反平行な磁気モーメントを持つ粒子の数が N_- 個あり、隣接した粒子の磁気モーメントの向きが $2N_A$ か所で互いに反平行である場合を考える。このような条件を満たすようにそれぞれの磁気モーメントの向きを定める方法が何通りあるか以下の手順に従って計算し、系の分配関数を求めたい。

- (1) まず、外部磁場に平行な磁気モーメントを持つ N_+ 個の区別できる粒子のみからなる環状鎖 X を用意し、この環状鎖 X を N_A か所で切って N_A 個の部分鎖に分ける (図 1)。このような分け方は何通りあるか答えよ。また、同じようにして、外部磁場に反平行な磁気モーメントを持つ N_- 個の区別できる粒子のみからなる環状鎖 Y を N_A か所で切り、 N_A 個の部分鎖に分ける方法は何通りあるか答えよ。

- (2) 問 (1) で環状鎖 Y から得られた N_A 個の部分鎖を、環状鎖 X の切断された位置に 1 個ずつ順番に挿入すると、切り方の異なる環状鎖 X と環状鎖 Y の 1 組から、 N 個の粒子からなる 1 次元環状鎖 G が 1 つできる (図 2)。このようにして得られる 1 次元環状鎖 G (図 2 右図) は問題文 (a) の条件を満たしていることがわかる。この方法で 1 次元環状鎖 G を作る方法は何通りあるか答えよ。

- (3) 問 (2) で得られた 1 次元環状鎖 G はすべて同じエネルギーを持つ。そのエネルギーを N 、 N_+ 、 N_A 、 J 、 μ 、 B を用いて表せ。

- (4) 問 (2) で得られた 1 次元環状鎖 G に対して、 N_+ 、 N_A の異なるすべてのとりうる状態の和をとり、系の分配関数 Z を N 、 N_+ 、 N_A 、 J 、 μ 、 B 、 k_B 、 T を用いて表せ。

- (b) 次に、粒子の総数 N が十分に大きい熱力学的極限を考える。この場合、系の分配関数は問 (4) で得られた分配関数 Z のすべてのとりうる状態の和の中の最大項 Z^* で近似できる。このような項を与える N_+ 、 N_- 、 N_A をそれぞれ N_+^* 、 N_-^* 、 N_A^* とする。

- (5) N_+^* 、 N_-^* 、 N_A^* が満たす独立な 2 つの条件式を求めよ。ただし、 $P = J/2k_B T$ 、 $Q = \mu B/k_B T$ とし、また、必要であれば、 $n \gg 1$ のときに成り立つ Stirling の公式 $\log n! = n \log n - n$ を用いよ。

(6) 問(5)の結果を用いると

$$\frac{(N_+^* - N_-^*)^2}{N_+^* N_-^*} = e^{4P} (e^Q - e^{-Q})^2 \quad (\text{ii})$$

が成り立つことが示せる。式(ii)から、この1次元環状鎖Gの磁化の平均 $\bar{M} = \mu(N_+^* - N_-^*)$ が

$$\bar{M} = \frac{N\mu e^{2P} \sinh Q}{\sqrt{1 + e^{4P} \sinh^2 Q}} \quad (\text{iii})$$

となることを示せ。また、 $B = 0$ のときの $\bar{M}$ を求め、その物理的意味について説明せよ。

(7) この1次元環状鎖Gの磁化率 $\chi = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\bar{M}}{B}$ を求め、隣接した粒子の間に相互作用がある場合とない場合とで、磁化率の温度変化がどのように異なるか説明せよ。

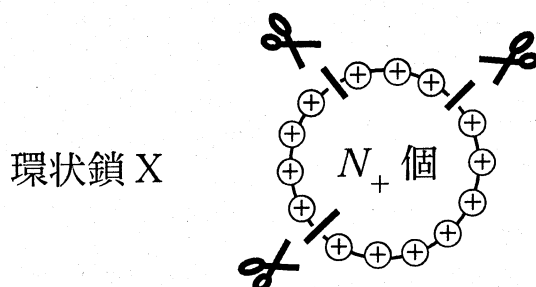


図1 この例では、 $N_+ = 14$ 個の粒子からなる環状鎖Xを切り、 $N_A = 3$ 個の部分鎖に分ける1つの方法を表している。ここで、 $\oplus$ は、外部磁場に平行な磁気モーメントを持つ粒子を表す。

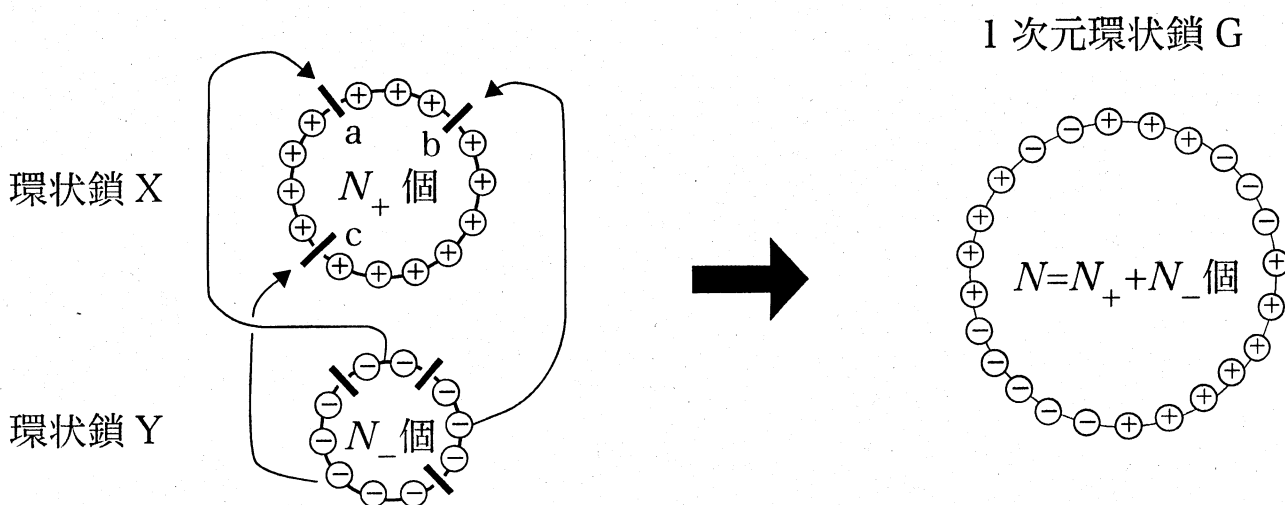


図2 この例では、外部磁場に平行な磁気モーメントを持つ $N_+ = 14$ 個の粒子からなる環状鎖Xと、反平行な磁気モーメントを持つ $N_- = 10$ 個の粒子からなる環状鎖Yを、ともに $N_A = 3$ 個の部分鎖に分け、右図の1次元環状鎖G ($N = 24$) を作る1つの方法を表している。1次元環状鎖G ($N = 24$) を作る時、環状鎖Yから得られる3つの部分鎖が、環状鎖Xのa位置、b位置、c位置にそれぞれ挿入されている。ここで、 $\oplus$ 、 $\ominus$ は、それぞれ外部磁場に平行な磁気モーメントを持つ粒子、反平行な磁気モーメントを持つ粒子を表している。