専門科目（午前）　　　　　　　　　　　２０　大修

材料物理科学Ａ　　　　　　　　時間　９：３０〜１２：００

物質科学創造Ｄ

注意事項

１．４つの問題全てに解答せよ。

２．解答は１問題ごとに別々の解答用紙に記入せよ。必要なら、その旨記して裏に書いてもよい。

３．各解答用紙には必ず問題の番号および受験番号を記入せよ。

４．各解答用紙は、解答を記入していないものも含めて全て提出せよ。

[1] 次の問に答えよ。

(a) 関数 $y(x(t))$に関する次の問に答えよ。

(1) dy/dt を求めよ。解答は，x および t を独立変数として含む形式であらわしてもよい。

$y(x) = \exp(x^2)$

$x(t) = \sinh(2t)$

(b) x を独立変数とする関数 y を考える。次の微分方程式の一般解を求めよ。

(2) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 e^x$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{1+x^2}$

(c) $c_1 > 0$, $c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2 = 1$ である実数 c_1, c_2, c_3, λ に関する方程式について考える。

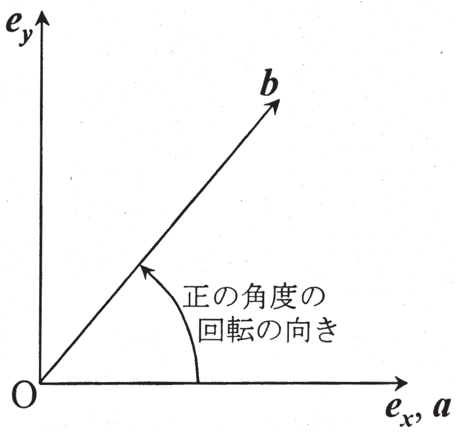
(4) つぎの式(i) ~ (iii)を満たす c_1, c_2, c_3, λ の組み合わせをすべて求めよ。

(i) $3c_1 + c_2 = \lambda c_1$

(ii) $c_1 + 3c_2 + c_3 = \lambda c_2$

(iii) $c_2 + 3c_3 = \lambda c_3$

(d) 点 O を原点とする二次元平面 P 内の 4 つの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を考える。$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ は互いに直交しており，$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{e}_x$ に等しく，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ を原点を中心として$\pi/3$ 回転させたベクトルに等しい。P 内の点 Q の位置を，$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ を基底ベクトルとする座標では(x, y)，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を基底ベクトルとする座標では(X,Y)とあらわすとする。また、角度の正の向きは図のようにとるものとする。



(5) (X,Y)を(x,y)であらわせ。

(6) 点 Q の位置を原点 O を中心に P 内で$\pi/3$ 回転させた点を Q'とする。点 Q'の位置を，$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ を基底ベクトルとする座標(x', y')であらわすとする。(x',y')を(x,y)であらわせ。

(7) 点 Q'の位置を，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を基底ベクトルとする座標(X',Y')であらわすとする。(X',Y')を(X,Y)であらわせ。

[2] 次の文章を読み、以下の問に答えよ。

図のように、摩擦がない水平面上で、バネ定数kのバネの一端に質量mの物体をつけ、もう一方のバネの端を壁に固定した。この物体の重心Gの位置をxとする。バネが自然の長さのときの物体の重心位置を原点として、バネが縮む方向の変位を正とする。バネの質量は無視でき、バネはフックの法則に従う。物体はX軸方向のみに運動する。

(a) 図の物体が空気中で運動する場合を考える。空気の抵抗は無視できるものとする。

(1) 物体がバネから受ける力をxの関数として表せ。

(2) バネにたくわえられるエネルギーをxの関数として表せ。

(3) 物体の重心位置が$x=-a$　($a>0$)となるまで物体を引き、初速度ゼロで静かに放すと物体は単振動を始める。物体の速さの最大値、および、物体の速さが最大になるときの物体の重心位置を求めよ。

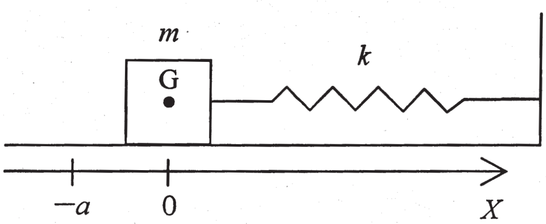
(4) 問(3)における単振動の周期を求めよ。

(b) 次に、図の物体が液体中で運動する場合を考える。物体が液体中で運動すると、物体は速度vに比例した抗力$-bv$ ($b>0$)を受ける。ここで、この物体に、時間tに依存した力$F(t)=F_0\cos\omega t$ ($\omega>0$)をX軸方向に加えて強制振動させる。F_0と角振動数ωは時間に依存しないものとする。

(5) このときの物体の運動方程式を書け。

(6) 十分時間が経った後、定常状態になる。このときの物体の振動の振幅を導出過程も含めて答えよ。

(7) $2mk>b^2$のとき、物体の振動の振幅が最大となるωの値を求めよ。



[3]　図 1 に示すように、接地した無限に広い導体平面 A から距離 a だけ離れた点 P に電荷$+Q$の点電荷が存在する場合の電場や電位を求めるのに、電気映像（鏡像）法という方法がある。この方法では、導体平面 A に関して点 P と対称な位置 P′に電荷$-Q$の仮想の点電荷を置き、導体平面を取り除いて、点 P、P′に 2 つの点電荷のみが存在すると仮定する（図 2)。破線は導体平面 A が存在していた位置を示す。図 1 の系の電場、電位は、図 2 の系の破線の右側の空間の電場、電位と同じである。この系が真空中に置かれているものとして、以下の問に答えよ。ただし、真空の誘電率をε_0とする。

(1)　図 2 に示す、点 P、P′にある 2 つの点電荷の作る電気力線を、図 2 を解答用紙に書き写して描け。図 1 の系の電場や電位を、電気映像法によって求めてよい理由を述べよ。

(2)　図 1 における点 P の点電荷に働く力の大きさ F を求めよ。また、その力は導体平面 A に対して引力か、斥力かを答えよ。

(3)　図 1 において、点 P から導体平面 A への垂線と平面 A との交点を O とする。O から距離 r だけ離れた導体平面 A 上の点における電場の強さ $E(r)$を求めよ。

(4)　図 1 の導体平面 A 上の電荷の面密度$\sigma(r)$を求めよ。

(5)　図3に示すように、接地した無限に広い導体平面Aからdだけ離れた点P_1に電荷$+Q$の点電荷、導体平面 A から $2d$ だけ離れた点 P_2に電荷 q の点電荷を置く。直線 P_1P_2は平面 A に対して垂直であるものとする。その直線 P_1P_2に対して垂直方向に点 P_1から d だけ離れた位置 P_3の電位が 0 になるための q を求めよ。

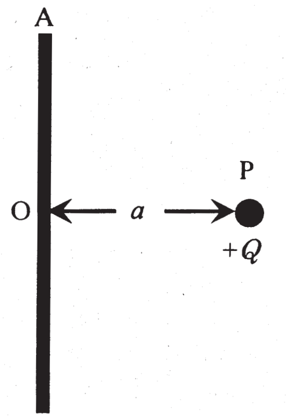


図 1

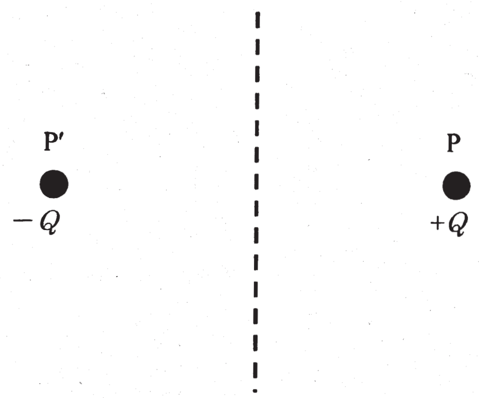


図 2

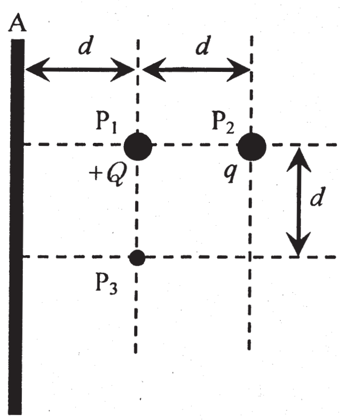


図 3

[4] 状態方程式 $p(V\text{-}b)=RT$ に従う 1 mol の気体があるとする。ただし、p は圧力、V は体積、T は絶対温度、 R は気体定数である。b は分子の排除体積に関する物質に固有な定数であり、V よりも十分小さい。以下の問に答えよ。

(a) この気体の体積を V_1 から V_2 に定圧下で準静的（可逆的）に膨張させたときの次の熱力学量を p、 V_1、 V_2、 b、 R、 C_p を用いて表せ。ただし、C_p は気体のモル定圧熱容量であり、温度に依存しないものとする。

(1) 気体の温度変化 ΔT

(2) 気体がした仕事 w

(3) 気体が受け取った熱 q

(4) 気体の内部エネルギー変化 ΔU

(5) 気体のエンタルピー変化 ΔH

(6) 気体のエントロピー変化 ΔS

(b) この気体について、モル定積（定容）熱容量 C_V は温度一定のもとで体積に依存しないことを証明したい。次の問に答えよ。

(7) 内部エネルギー U が状態量であることを利用して $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$ となることを示せ。

(8) 上記の熱力学関係式 $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$ とこの気体の状態方程式を用いて、 C_V は温度一定のもとで体積に依存しないことを証明せよ。