専門科目（午前）　　　　　　　　　　　　１９　大修

材料物理科学Ａ　　　　　　　　　時間　９：３０～１２：００

物質科学創造Ｄ

注意事項

１．４つの問題全てに解答せよ。

２．解答は１問題ごとに別々の解答用紙に記入せよ。必要なら、その旨記して裏に書いてもよい。

３．各解答用紙には必ず問題の番号および受験番号を記入せよ。

４．各解答用紙は、解答を記入していないものも含めて全て提出せよ。

[1]　次の問に答えよ。

(a)　行列 $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に関して，次の問に答えよ。

(1)　行列式の値を求めよ。
(2)　固有値を求めよ。
(3)　上で求めた固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

(b)　x を独立変数とする関数 y を考える。次の微分方程式の一般解を求めよ。

(4)　$x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(5)　$\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$

(c)　t を独立変数とする関数 $f(t)$ を考える。

(6)　$f(t) = e^{-at}$，ただし $a > 0$ で $t \geq 0$ のとき，$\cos\omega t$ を用いて
$f(t)$ のフーリエ余弦変換を求めよ。
(7)　上のフーリエ余弦変換で求めた関数を $F(\omega)$ とするとき，
$F(\omega)$ のグラフを書け。また，この関数の最大値を G とするとき，
$F(\omega) = \dfrac{G}{2}$ となる ω を求めよ。

(d)　次の定積分を求めよ。

(8)　$\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

(9)　$\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$

[2] 次の文章を読み，以下の問に答えよ。

長さ l, 質量 m の一様な剛体棒がある。野球のバットを振ってボールを打つように，この棒で，水平な床の上で静止している半径 R, 質量 M の一様な剛体球を叩いて（**図１**および**図２**を参照），床の上で球をころがす場合を考える。棒は，床から高さ αR（$0<\alpha<2$）の水平面内を，固定された一端 O を中心として回転する。球と衝突した棒上の点を C とし，OC の長さを βl（$0<\beta<1$）とする。

衝突直後に O 点を中心とした棒の回転は停止し，球は床の上をすべらずにころがり出した。衝突直前における O 点を中心とした棒の回転角速度の大きさは ω_0 であった。

棒の太さは球の半径に比べて十分小さいとし，空気抵抗は無視できるものとする。

(1) O 点を中心とした上記の回転に関する棒の慣性モーメントを I_B とする。$I_B=\dfrac{1}{3}ml^2$ であることを示せ。

(2) 衝突によって球が棒から受ける力積の大きさを P とする。P を求めよ。

(3) 衝突によって O 点に作用する力積の大きさを X とする。X を P で表せ。

(4) $X=0$ となるときの β を求めよ。

(5) 球の中心を通る軸に関する球の慣性モーメントを I_S とする。$I_S=\dfrac{2}{5}MR^2$ であることを示せ。

(6) 衝突によって球が床の上をすべらずにころがり出すときの α を求めよ。

(7) 衝突直後における球の中心まわりの回転角速度の大きさを Ω_0 とする。Ω_0 を求めよ。

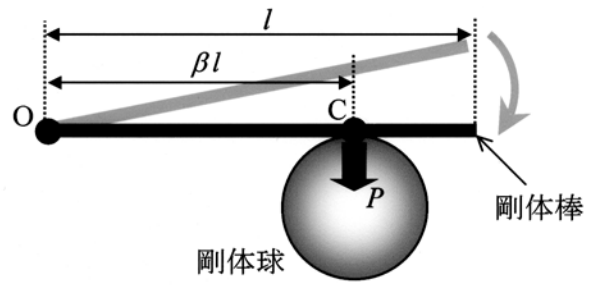

図１．真上から見た図

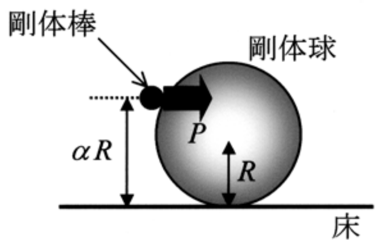

図２．真横から見た図

[3] 半径がそれぞれ a，b（$a < b$）で，高さ c の 2 つの円筒導体を，**図 1** に示すように円筒の中心軸が一致するように配置し，底部を絶縁体でふさいだ同軸円筒容器 M_1 を用意する。同様に，半径がそれぞれ $2a$，$2b$ で，高さ c の 2 つの円筒導体を，**図 2** に示すように円筒の中心軸が一致するように配置し，底部を絶縁体でふさいだ同軸円筒容器 M_2 を用意する。この底ぶたの抵抗は無限大であり，静電容量成分は無視できるものとする。これらの容器は空気中に置かれているものとして，以下の問に答えよ。

(a) 空の同軸円筒容器 M_1 の内側の円筒導体と外側の円筒導体の間に抵抗率 ρ の物質を容器の上端まで充てんして円筒型抵抗を作製した。ただし，空気の抵抗率は無限大であるとする。

(1) この円筒型抵抗の内側の導体と外側の導体の間の直流抵抗を求めよ。

(2) 次に，**図 3** に示すように M_1 から抵抗率 ρ の物質を体積 x だけ，空の同軸円筒容器 M_2 に移した。物質を移した後の M_1 の内側の導体と外側の導体の間の直流抵抗 $R_1(x)$，および M_2 の内側の導体と外側の導体の間の直流抵抗 $R_2(x)$を求めよ。

(3) 抵抗 $R_1(x)$，$R_2(x)$を直列に接続し，起電力 V の電池をつなぐ。流れる電流が最大となるときの x を求めよ。

(b) 空の同軸円筒容器 M_1 の内側の円筒導体と外側の円筒導体の間に誘電率 ε の物質を容器の上端まで充てんして円筒型コンデンサを作製した。ただし，空気の誘電率を ε_0 とし，$\varepsilon > \varepsilon_0$ とする。また，端面の影響や物質と空気との界面の影響は無視できるものとする。

(4) この円筒型コンデンサの内側の導体と外側の導体の間の静電容量を求めよ。

(5) 次に，**図 3** に示すように M_1 から誘電率 ε の物質を体積 y だけ，空の同軸円筒容器 M_2 に移した。物質を移した後の M_1 の内側の導体と外側の導体の間の静電容量 $C_1(y)$，および M_2 の内側の導体と外側の導体の間の静電容量 $C_2(y)$を求めよ。

(6) コンデンサ $C_1(y)$と $C_2(y)$を並列に接続した。M_1 から M_2 へ移す物質の体積の増加とともに並列に接続した 2 つのコンデンサの合成静電容量がどのように変化するかを述べよ。

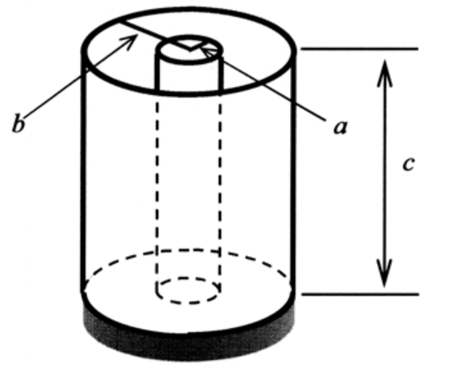

図 1

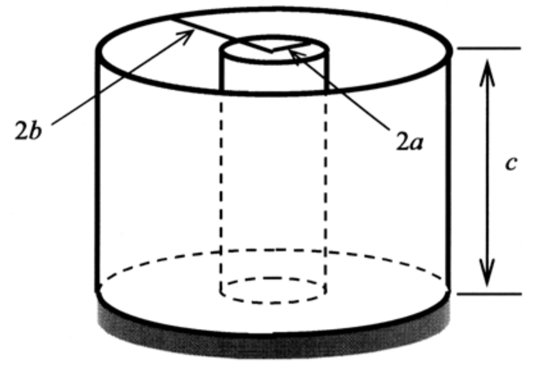

図 2

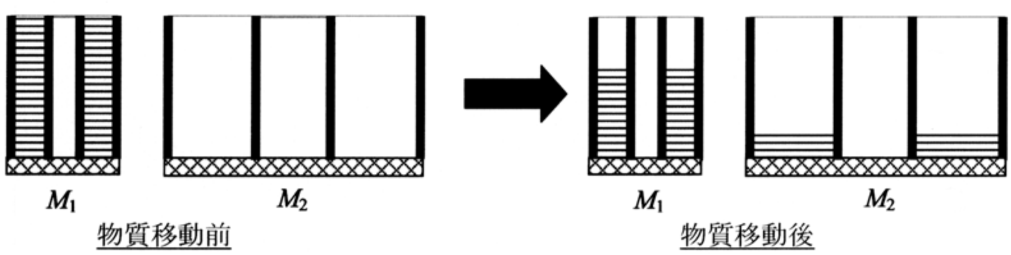

図 3

[4] 圧力 P，体積 V，温度 T の空気を理想気体とみなし，以下の問に答えよ。ただし，空気の密度を ρ，定圧比熱 C_P と定積比熱 C_V の比 $\dfrac{C_P}{C_V}$ を γ，平均分子量を M とする。また，気体定数を R，重力加速度を g とする。なお，数値計算においては，$\gamma=1.4$，$M=2.9\times10^{-2}$ kg/mol，$R=8.3$ J/mol·K，$g=9.8$ m/s^2 を用いよ。

(a) 空気を準静的に断熱圧縮するとき，以下の問に答えよ。

(1) この過程において $PV^{\gamma}=$一定（Poisson の式）となることを示せ。

(2) 断熱体積弾性率（圧縮率の逆数）$k_{\mathrm{ad}}=\gamma P$ であることを Poisson の式を使って導け。ただし，下付き添字 ad は断熱変化を示す。

(3) 空気中を伝わる音波の速度 c は，$c=\sqrt{\left(\dfrac{dP}{d\rho}\right)_{\mathrm{ad}}}$ で与えられるものとする。c を γ，M，R，T で表せ。

(4) $P=1\times10^5$ Pa，$T=273$ K での音波の速度 c を有効数字 2 桁で求めよ。

(b) 下図のように，シリンダー内をなめらかに移動できる面積 A の２枚のピストンの間に微少量の空気を封入する。このシリンダーは鉛直に保たれ，下側のピストンが地表から高さ z の位置に置かれている。このとき，上側のピストンが $z+\Delta z$ の位置にあった。高さ z での空気の圧力を $P(z)$，温度を $T(z)$，密度を $\rho(z)$ とし，重力加速度 g は高さによらず一定とみなして，以下の問に答えよ。ただし，シリンダーおよびピストンを介した熱の出入り，物質の出入り，シリンダーとピストンの変形，およびピストンの厚さと質量は無視できるものとする。

(5) シリンダー内の空気に対して上面から働く圧力，下面から働く圧力，および重力のつり合いの方程式を求めよ。ただし，シリンダー内の空気の密度 $\rho(z)$ は一定であるとみなしてよい。

(6) Δz は十分小さいものとして，$\Delta z\to0$ の極限をとり，上で求めたつり合いの方程式に対して $\dfrac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z}$ と $\rho(z)$ の関係を示せ。

(7) シリンダー内の空気は z の増加に対して準静的に断熱膨張するものとして $\dfrac{\mathrm{d}T(z)}{\mathrm{d}z}$ を γ，M，g，R で表せ。ただし，γ の z 依存性は無視できるものとする。

(8) z を 100m 増加させたときのシリンダー内の空気の温度変化を有効数字 2 桁で求めよ。